
LÖSUNGEN ZU
HANS-OTTO GEORGII: STOCHASTIK

— KAPITEL 1 —

TIM KOPI SCHKE
11/2020

Aufgabe 1 : ✓
Aufgabe 2 : ✓
Aufgabe 3 : ✓
Aufgabe 4 : ✓
Aufgabe 5 : ✓
Aufgabe 6 : ✓
Aufgabe 7 : ✓

Aufgabe 8 : ✓
Aufgabe 9 : ✓
Aufgabe 10 : ✓
Aufgabe 11 : ✓
Aufgabe 12 : ✓
Aufgabe 13 : ✓
Aufgabe 14 : ✓

Aufgabe 15 : ✓
Aufgabe 16 : ✓
Aufgabe 17 : ✓
Aufgabe 18 : ✓
Aufgabe 19 : ✓
Aufgabe 20 : ✓
Aufgabe 21 : ✓

Aufgabe 1

(a). Sei $w \in A$. Definiere $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$. Dann ist nach Definition von A auch $w \in X$. Entferne nun o.E. A_1 aus X . Dann gilt weiterhin $w \in X/A_1$ nach Definition von A . Induktiv erhält man so für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$, dass $w \in X/\bigcup_{n \leq N} A_n$ für alle $N \geq 1$. Also liegt w in allen Mengen $X, X/A_1, X/A_1 \cup A_2, \dots$ und damit

$$w \in \bigcap_{N \geq 1} X / \bigcup_{n \leq N} A_n = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n \quad (1)$$

nach Definition von X . ■

(b). Sei $w \in A$ wie oben. Dann gilt klarerweise $1_A(w) = 1$. Wegen (a) gilt auch

$$\begin{aligned} x_1(w) &= \sup\{1_{A_k}(w) : k \geq 1\} = 1 \\ x_2(w) &= \sup\{1_{A_k}(w) : k \geq 2\} = 1 \\ &\vdots \\ x_n(w) &= \sup\{1_{A_k}(w) : k \geq n\} = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

da w in unendlich vielen der A_n enthalten ist. Also ist

$$\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup 1_{A_n} = 1 \quad (2)$$

Sei umgekehrt $w \notin A$. Dann ist klarerweise $1_A(w) = 0$. Jetzt ist w nicht mehr in unendlich vielen der A_n enthalten, d.h. es existiert ein $i \in \mathbb{N}$ für das gilt, dass $w \notin A_i$ und somit auch $w \notin \bigcup_{n \geq i} A_n$. Also hat man $x_i(w) = 0$. Insgesamt erhält man also

$$\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup 1_{A_n} = 0 \quad (3)$$

■

Aufgabe 2

Es sind die Eigenschaften einer σ -Algebra zu prüfen :

- (i) $\Omega \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$.
- (ii) $A \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A} \implies A^c \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$.
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A} \implies \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$

Zu (i) : Wegen $\Omega \in \mathcal{A} \forall A \in \Sigma$ aufgrund der σ -Algebra-Eigenschaft der $\mathcal{A}$ folgt auch, dass $\Omega \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$.

Zu (ii) : Sei $X \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt aber wieder $X \in \mathcal{A} \forall A \in \Sigma$ und $X^c \in \mathcal{A} \forall A \in \Sigma$ wegen der σ -Algebra-Eigenschaft. Damit ist dann $X^c \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$.

Zu (iii). Seien $X_1, X_2, \dots \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$ beliebig. Dann ist $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{A} \forall A \in \Sigma$ und damit aber wiederum $\bigcup_{i \geq 1} X_i \in \mathcal{A} \forall A \in \Sigma$, also $\bigcup_{i \geq 1} X_i \in \bigcap_{A \in \Sigma} \mathcal{A}$. ■

Aufgabe 3

Wir zeigen erst, dass $X = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ eine σ -Algebra ist durch Überprüfung der Definitionseigenschaften. Danach zeigen wir, dass

$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}) = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\} \quad (4)$$

- (1) Es gilt $\Omega \in X$, da $\Omega^c = \emptyset$ trivialerweise abzählbar ist.
- (2) Sei nun $A \in X$ beliebig. Ist A abzählbar, so ist $A^c \in X$ weil $(A^c)^c = A$ abzählbar ist. Ist $A \in X$, aber nicht abzählbar, dann ist A nach Definition von X eine Menge, für die das Komplement abzählbar ist. Also $A^c \in X$.
- (3) Seien $A_1, A_2, \dots \in X$. Falls alle $A_1, A_2, \dots$ abzählbar sind, so ist die abzählbare Vereinigung dieser abzählbaren Mengen wieder abzählbar, also $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in X$. Sind alle $A_1, A_2, \dots$ nicht abzählbar, dann sind sie jeweils Mengen, für die die Komplemente abzählbar sind. Somit ist gemäß der DeMorgan'schen Regeln

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i = \bigcup_{i \geq 1} (A_i^c)^c = \left(\bigcap_{i \geq 1} A_i^c \right)^c \quad (5)$$

ein abzählbarer Schnitt abzählbarer Mengen und damit abzählbar. Für $j \in \mathbb{N}$ mit A_j als abzählbare Menge und $\mathbb{N} \ni i \neq j$ mit A_i als Menge mit abzählbarem Komplement gilt, dass

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i = A_j \cup \bigcup_{i \neq j} A_i = A_j \cup \left(\bigcap_{i \neq j} A_i^c \right)^c \quad (6)$$

was nach (2) als Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Dies gilt dann natürlich analog für jede beliebige Anzahl an abzählbaren Mengen, A_j .

Dies beweist, dass X eine σ -Algebra ist. Nun beweisen wir, dass X und $\sigma(\mathcal{G})$ identisch sind, d.h., dass $\mathcal{G}$ X erzeugt.

Einerseits gilt $\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \subset X$, da auch alle einelementigen Mengen abzählbar und damit in X sind. Da X selbst eine σ -Algebra ist, gilt, dass für $\{\omega\}$ als Element von X auch $\{\omega\}^c \in X$ gilt und sogar $\bigcup_{i \geq 1} \{\omega\}$. Also gilt auch, dass $\sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}) \subset X$. Dies zeigt " $\subset$ ".

Nun sei umgekehrt $A \in X$ beliebig. Für A abzählbar, ist $A = \bigcup_{\omega_i \in A} \omega_i$ und damit $A \in \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\})$. Für A nicht abzählbar, ist A^c abzählbar nach Definition von X und damit $A^c = \bigcup_{\omega_i \in A^c} \omega_i$, also $A^c \in \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\})$. Damit ist aber $A \in \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\})$, da $\sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\})$ eine σ -Algebra ist. Dies zeigt die andere Richtung " $\supset$ ". ■

Aufgabe 4

" $\subseteq$ " : Für $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ für alle $i = 1, \dots, n$ mit $a_i < b_i$ gilt

$$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}([a_i, b_i]) \in \mathcal{B}^{\otimes n} \quad (7)$$

und damit

$$\left\{ \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right\} \subset \mathcal{B}^{\otimes n}, \quad (8)$$

also insgesamt

$$\mathcal{B}^n = \sigma\left(\left\{ \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right\}\right) \subset \mathcal{B}^{\otimes n} \quad (9)$$

Anschaulich ist dies klar : Alle Seiten des n -dimensionalen Quaders in $\mathbb{R}^n$ sind reelle Intervalle und damit jeweils ein Element von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Also liegt der Quader selbst in der Menge

$$\sigma(\{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \mathcal{B}^{\otimes n} \quad (10)$$

" $\supseteq$ " : Sei umgekehrt $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \supset \prod_{i=1}^n A_i &= (A_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap (\mathbb{R} \times A_2 \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \dots \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times A_n) \\ &= X_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap X_n^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}^n \end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit und damit Messbarkeit der Projektionen. Also folgt auch

$$\sigma\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \subset \mathcal{B}^n \quad (11)$$

■

Aufgabe 5

" $\supseteq$ " : Klarerweise sind alle Mengen $\xi \in \mathcal{P}(\Omega)$ als Punktmengen abgeschlossen. Da $\mathcal{B}_\Omega^n$ alle abgeschlossenen Mengen umfasst, die im Schnitt von Ω und $\mathcal{B}^n$ liegen, folgt $\xi \in \mathcal{B}_\Omega^n$, d.h. $\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{B}_\Omega^n$.

" $\subset$ " : Da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ höchstens abzählbar ist, ist Ω eine Punktmenge. Sei nun $\omega_1, \omega_2, \dots$ eine Aufzählung der Elemente in Ω . Sei o.E. Ω endlich mit $|\Omega| = k$. Dann können k Mengen in $\mathbb{R}^n$ der Form $(a_1^{(1)}, b_1^{(1)}) \times \dots \times (a_n^{(1)}, b_n^{(1)}), \dots, (a_1^{(k)}, b_1^{(k)}) \times \dots \times (a_n^{(k)}, b_n^{(k)})$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ gefunden werden, sodass jeweils genau eines der w_i in einer dieser Mengen liegt. Genauso können $\binom{k}{2}$ Mengen obiger Bauart gefunden werden, sodass genau zwei paarweise verschiedene w_i darin liegen. Induktiv fortgesetzt erhält man dann, dass insgesamt

$$\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} = 2^k \quad (12)$$

Mengen gefunden werden können, die alle $1, 2, \dots, k$ -elementigen Teilmengen von Ω enthalten. Da wegen $A \cap \Omega = \Omega \forall A \in \mathcal{B}_\Omega^n$ gilt, sind die so erzeugten Mengen aber gerade die Mengen aller Teilmengen von Ω , d.h. $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ für alle $A \in \mathcal{B}_\Omega^n$ und damit $\mathcal{B}_\Omega^n \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Diese Argumentation gilt auch für Ω abzählbar unendlich, wobei die Mengen $A \in \mathcal{B}_\Omega^n$ unendlich groß werden können.

■

Aufgabe 6

Für festes $k \geq 1$ und $i \in \{1, \dots, k\}$ ist

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = x_1, \dots, X_k(\omega) = x_k\} \quad (13)$$

wobei $x_i \in E_i$ gelten soll.

Wegen

$$\{(a, b)\} \subset \mathbb{R}^2 = \{a\} \times \{b\} = (\{a\} \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \{b\}) = X_1^{-1}(a) \cap X_2^{-1}(b) \quad (14)$$

gilt bzgl. Gleichung (13) auch die Darstellung

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = x_1, \dots, X_k(\omega) = x_k\} &= \{\omega \in \Omega : \omega = X_{1, \dots, k}^{-1}(x_1, \dots, x_k)\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega = \bigcap_{i=1}^k X_i^{-1}(x_i)\} \end{aligned}$$

Damit kann aber $\mathcal{G}$ geschrieben werden als

$$\mathcal{G} = \left\{ \{\omega \in \Omega : \omega = \bigcap_{i=1}^k X_i^{-1}(x_i)\} : k \geq 1, x_i \in E_i\right\} \cup \{\emptyset\} \quad (15)$$

Einerseits gilt klarerweise $\{\emptyset\} \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{P}(\Omega)$. Andererseits gilt aber auch

$$\left\{ \{\omega \in \Omega : \omega = \bigcap_{i=1}^k X_i^{-1}(x_i)\} : k \geq 1, x_i \in E_i\right\} \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{P}(\Omega) \quad (16)$$

wegen der Definition von $\otimes_{i=1}^n \mathcal{P}(\Omega)$. Also gilt dann auch $\sigma(\mathcal{G}) \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{P}(\Omega)$.

Umgekehrt liegt der Erzeuger von $\otimes_{i=1}^n \mathcal{P}(\Omega)$ aber schon in $\mathcal{G}$ und damit $\otimes_{i=1}^n \mathcal{P}(\Omega) \subset \sigma(\mathcal{G})$.

Die Schnittstabilität folgt aus der Tatsache, dass $\{x_i\} \cap E_i = \{x_i\}$ und $\{x_i\} \cap \{x_j\} = \emptyset$ für beliebige $x_i, x_j \in E_i$. Wegen $1 \leq k \leq n$ ist somit jedes $\omega \in \mathcal{G}$ als Schnitt von zwei Elementen $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{G}$ darstellbar. ■

Aufgabe 7

Definiere $\mathbf{a}_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1 \times \Omega_2, \mathbf{a}_{\omega_1}(\omega_2) = (\omega_1, \omega_2)$. Dann ist $\mathbf{a}_{\omega_1}$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ messbar. Denn für $A_1 \in \mathcal{F}_1$ und $A_2 \in \mathcal{F}_2$ ist

$$\mathbf{a}_{\omega_1}^{-1}(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_2 & \text{wenn } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \quad (17)$$

Somit gilt auf jeden Fall $\mathbf{a}_{\omega_1}^{-1}(A_1 \times A_2) \in \mathcal{F}_2$ und dadurch die Messbarkeit von $\mathbf{a}_{\omega_1}$. Mit $\mathcal{F}_2 \ni \mathbf{a}_{\omega_1}^{-1}(A) = A_{\omega_1}$ folgt sodann die erste Behauptung.

Für die zweite Behauptung schreibt man $f(\omega_1, \cdot) = f \circ \mathbf{a}_{\omega_1}$. Die Messbarkeit von $f(\omega_1, \cdot)$ folgt dann aus der Messbarkeit von f und $\mathbf{a}_{\omega_1}$ mit Aufgabe 1.15. ■

Aufgabe 8

Obwohl Georgii eine Lösung für diese Aufgabe präsentiert, ist diese meiner Meinung nach äußerst knapp.

(a). Die Gleichung folgt sofort sobald man zeigen kann, dass $\bigcap_{k \in K} A_k = \bigcup_{K \subset J \subset I} B_J$.

Ein abstrakteres und durch die Hilfe von math.SE beigesteuertes Argument zeigt im ersten Schritt die Disjunktheit der S_J und danach die Gleichheit beider Seiten der Gleichung :

Definiere für jedes Element $\omega \in \Omega$ die Menge $J_\omega = \{j \in I : \omega \in A_j\}$. Dann ist ω klarerweise in B_{J_ω} , d.h. $\omega \in B_{J_\omega}$. Man kann nun zeigen, dass es keine andere Menge $L \neq J_\omega$ gibt so, dass gleichzeitig $\omega \in B_L$ und $\omega \in B_{J_\omega}$ was $B_L \cap B_{J_\omega} \neq \emptyset$ zur Folge hätte.

Da demnach jedes ω in genauer einer Menge B_{J_ω} vorkommt, sind die B_J dann für verschiedene J disjunkt.

Sei $\omega \in B_L$ und $\omega \in B_{J_\omega}$ und man nehme an, es gäbe einen Index $j \in L \setminus J_\omega$. Dann wäre B_L durch den Schnitt mit der zusätzlichen Menge A_j in A_j enthalten, d.h. $B_L \subseteq A_j$. Andererseits wäre ω dann aber aufgrund der Definition der B_J auch in A_j^c enthalten, also Widerspruch. Einen

solchen Index $j \in L \setminus J_\omega$ kann es also nicht geben. Umgekehrt gebe es einen Index $j \in J_\omega \setminus L$. Dann ist $\omega \in A_j$ aufgrund der Definition von J_ω . Gleichzeitig muss aber wegen $\omega \in B_L$ gelten, dass $\omega \in \Omega \setminus A_j$. Das führt erneut zu einem Widerspruch. Also ist $L = J_\omega$.

Ein deutlich einfacheres, direktes Argument zeigt die Disjunktheit der Mengen B_J für unterschiedliche J wie folgt. Sei $J_1, J_2 \subset I$ mit $J_1 \neq J_2$. Dann gilt entweder $J_1 \setminus J_2 \neq \emptyset$ oder umgekehrt. In jedem Fall gibt es einen Index j^* in $I \setminus J_1 \cup I \setminus J_2$ so, dass $j^* \in J_1$ oder $j \in J_2$. Also erhält man

$$\begin{aligned} B_{J_1} \cap B_{J_2} &= \left(\bigcap_{j \in J_1} A_j \cap \bigcap_{j \in I \setminus J_1} A_j^c \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J_2} A_j \cap \bigcap_{j \in I \setminus J_2} A_j^c \right) \\ &= \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} A_j \cap \bigcap_{j \in I \setminus J_1 \cup I \setminus J_2} A_j^c \\ &= \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} A_j \cap \bigcap_{j \in (I \setminus J_1 \cup I \setminus J_2) \setminus j^*} A_j^c \cap A_{j^*}^{c,*} \\ &\subseteq A_{j^*}^* \cap A_{j^*}^{c,*} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt muss dann nur noch die Gleichheit der beiden Seiten gezeigt werden.

Sei $\omega \in \bigcap_{k \in K} A_k$ mit $K \subset I$. Dann gilt mit der Notation von oben, dass $K \subseteq J_\omega$. Also gilt $\omega \in B_{J_\omega}$ und wegen $J_\omega \subset I$ und $J_\omega \subset \bigcup_{K \subset J \subset I} J$, dass $\omega \in \bigcup_{J: K \subset J \subset I} B_J$. Insgesamt also $\bigcup_{k \in K} A_k \subset \bigcup_{J: K \subset J \subset I} B_J$.

Sei jetzt umgekehrt $\omega \in \bigcup_{J: K \subset J \subset I} B_J$. Dann muss wenigstens ein Element $k \in K$ auch Element von J_ω sein, da andernfalls $\omega \notin S_J$ für alle $K \subset J$ und damit insbesondere $\omega \notin \bigcup_{J: K \subset J \subset I} B_J$. Also $K \subseteq J_\omega$. Dann ist aber $\omega \in A_k$ für alle $k \in K$, also $\omega \in \bigcap_{k \in K} A_k$. Das beweist die andere Richtung. ■

(b). Wie auch in Georgii's Lösung kann nun $P(\bigcap_{k \in K} A_k)$ ersetzt werden durch $\sum_{J: K \subset J \subset I} P(B_J)$. Danach wird über alle $J \subset K \subset L \subset I$ summiert. Aus diesem Grund ergibt sich das erste Gleichheitszeichen mit dem Vertauschen der Faktoren. Die letzte Gleichung wiederum ergibt sich daraus, dass

$$\sum_{K: J \subset K \subset L} (-1)^{|K \setminus J|} = \sum_{k=1}^{|K|} \binom{|K|}{|K| - k} (-1)^{|K \setminus J|} = (1 + (-1))^{|K \setminus J|} = \begin{cases} 0 & J \neq K \neq L \\ 1 & J = K = L \end{cases} \quad (18)$$

■

Aufgabe 9

Die Ungleichung ist recht einfach mithilfe von vollständiger Induktion zu zeigen. Eine andere Möglichkeit ist die Betrachtung als gerade Abschätzung des Einschluss-Ausschluss-Prinzips, die jedoch einen weiteren Bogen spannt.

Induktionsanfang : Klarerweise gilt für zwei Mengen $A_1, A_2 \subset \Omega$, dass $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

Induktionsvoraussetzung : $n \rightarrow n + 1$

Induktionsschluss :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1}\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1}\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j)
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt hierbei aus $\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})$ und der σ -Subadditivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen (vgl. Satz 1.11), d.h.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_{n+1}) \quad (19)$$

■

Aufgabe 10

Die Zufallsvariable, die hier betrachtet wird, bildet alle **geordneten** Tripel der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die Summe der Elemente jedes Tripels ab. Sei also

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \forall i \in \{1, 2, 3\}\} \quad (20)$$

und

$$\Omega' = \left\{ \sum_{i=1}^3 \omega_i : (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \right\} \quad (21)$$

Klarerweise sind sowohl Ω als auch Ω' endlich. Aus diesem Grund können wir die Potenzmenge dieser Mengen als geeignete σ -Algebra nehmen und definieren damit die Zufallsvariable

$$X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \rightarrow (\Omega', \mathcal{P}(\Omega')), (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \sum_{i=1}^3 \omega_i \quad (22)$$

Wir können annehmen, dass die Würfel fair sind. Damit sind alle Tripel gleich wahrscheinlich und

$$\mathcal{P}(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = 1/|\Omega| \quad (23)$$

für ein Tripel $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$. Weiterhin gilt $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Seien nun $A = \{11\} \subset \mathcal{P}(\Omega')$ und $B = \{12\} \subset \mathcal{P}(\Omega')$ die betrachteten Bilder der Zufallsvariable. Nach Satz 1.28 wird durch

$$P'(A') := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}) \quad A' \in \mathcal{P}(\Omega') \quad (24)$$

die Verteilung von X definiert. Im Fall von $A = \{11\}$ bedeutet dies, dass

$$P'(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \{11\}\}) \quad (25)$$

und wegen Satz 1.18 im diskreten Fall weiter

$$P(X^{-1}(A)) = \sum_{\omega \in X^{-1}(A)} P(\{\omega\}) = \frac{|X^{-1}(A)|}{|\Omega|} = \frac{|X^{-1}(A)|}{216} \quad (26)$$

11 lässt sich in der Aufgabenstellung bereits angegeben auf folgende Weise mit Hilfe von drei Augenzahlkombinationen darstellen: 6-4-1, 5-5-1, 5-4-2, 6-3-2, 5-3-3 und 4-4-3. Jede Augenzahlkombination kann permutiert werden. Für 6-4-1 hat man 3! Permutationen, für 5-5-1 nur 3 Permutationen, für 5-4-2 3!, für 6-3-2 3!, für 5-3-3 nur 3 und für 4-4-3 auch nur 3. Also gibt es insgesamt $3! + 3 + 3! + 3! + 3 + 3 = 27$ mögliche Tripel in Ω , die in der

Summe 11 ergeben. Macht man das Gleiche für 12 erhält man, dass es nur 25 Tripel in Ω gibt, die in der Summe 12 ergeben. Somit erhalten wir

$$P'(A) = P(X^{-1}(A)) = \frac{27}{216}$$

$$P'(B) = P(X^{-1}(B)) = \frac{25}{216}$$

Wegen $P'(A) > P'(B)$ zeigt dies, dass es tatsächlich (geringfügig) wahrscheinlicher ist, mit drei Würfeln in der Summe eine 11 zu würfeln als eine 12. ■

Aufgabe 11

Die Aufgabenstellung kann interpretiert werden als ein Wurf von sechs fairen dreiseitigen Würfeln. Setze zur Abkürzung K = “Trinkhalm fehlt”, D = “Trinkhalm defekt” und G = “Trinkhalm gut”. Die Ergebnismenge ist damit

$$\Omega = \{(k_1, \dots, k_6) : k_i \in \{K, D, G\} \forall i \in \{1, \dots, 6\}\} \quad (27)$$

auf die wir als endliche Menge die Potenzmenge als passende σ -Algebra legen können. Damit ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ unser Ergebnisraum. Es gilt klarerweise $|\Omega| = 3^6$. Die gesuchte Menge kann man nun folgendermaßen formalisieren. Insgesamt ist

$$A = A_1 \cap A_2 \quad (28)$$

mit

$$A_1 = \{(k_1, \dots, k_6) : \exists i \in \{1, \dots, 6\} : k_i = K\} \quad (29)$$

und

$$A_2 = \{(k_1, \dots, k_6) : \exists i \in \{1, \dots, 6\} : k_i = G\} \quad (30)$$

Andererseits gilt aber auch

$$A_1 = \tilde{A}_1^c \quad (31)$$

mit

$$\tilde{A}_1 = \{(k_1, \dots, k_6) : \exists i \in \{1, \dots, 6\} : k_i = K\} \quad (32)$$

und analog $A_2 = \tilde{A}_2^c$ mit analoger Definition für $\tilde{A}_2$. Offensichtlich gilt sowohl $\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 = \emptyset$ als auch $|\tilde{A}_1| = |\tilde{A}_2| = 2^6 = 64$. Damit ist $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2$ eine Vereinigung disjunkter Mengen. Abschließend können wir also folgern, dass

$|A| = |A_1 \cap A_2| = |\tilde{A}_1^c \cap \tilde{A}_2^c| = |\Omega / \tilde{A}_1 \cap \Omega / \tilde{A}_2| = |\Omega / (\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2)| = |\Omega| - |\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2| = |\Omega| - |\tilde{A}_1| - |\tilde{A}_2| = 601$
und nach der Gleichverteilungsannahme der drei Halmzustände somit, dass

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{601}{729} \approx 82,5\% \quad (33)$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch praktisch simulieren. Der folgende R Code simuliert die Ausgangsfrage. Bei Ausführung erhält man genau das Ergebnis.

```
Verteilung = replicate(100000, {
  A = sample(c(1:3), 6, prob = rep(1/3, 3), replace = TRUE)
})

sum(apply(AB, 2,
  function(x) length(x[x == 1]) > 0
    & length(x[x == 3]) > 0
  )/100000
```

Aufgabe 12

Bei einem Stand von (A) 2 : 3 (B) sind sicher bereits fünf der sieben Runden gespielt. Wegen $7 \equiv 1 \pmod{2}$ ist kein Unentschieden möglich, d.h. es wird sicher einen Sieger geben. Unter der Annahme der Unabhängigkeit der Runden ist die genaue Entstehung des Standes von 2 : 3 für die Lösung der Aufgabe irrelevant. Die Betrachtung konzentriert sich auf die beiden letzten Runden. Man muss vier Fälle unterscheiden :

Runde 6	Runde 7	Gesamtgewinner
A	A	A
A	B	B
B	A	B
B	B	B

Aufgrund der Fairness des Spiels sind alle vier Kombinationen der Runden 6 und 7 gleich wahrscheinlich. Das impliziert aber, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit von Brigitte $3/4 = 75\%$ beträgt während die von Anton nur $1 - 3/4 = 1/4 = 25\%$ beträgt. Mit Stand (A) 2 : 3 (B) sollte der Gewinn deshalb fairerweise $1/4 : 3/4$, d.h. 1 : 3 aufgeteilt werden und nicht im Verhältnis 2 : 3. ■

Aufgabe 13

Die Lösung von Georgii ist bereits klar und umfangreich, vgl. Georgii (2015, p. 385). ■

Aufgabe 14

Wir prüfen die Kriterien für eine σ -Algebra nach :

1. Es ist $\Omega' \in \mathcal{F}'$, da $X^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{F}$ wegen $\mathcal{F}$ σ -Algebra.
2. Sei $A' \in \mathcal{F}'$. Dann gilt $X^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ und $(X^{-1}(A'))^c$ da $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra ist nach Voraussetzung. Dann gilt aber aufgrund der Eigenschaften von X^1 , dass auch $X^{-1}(A'^c) \in \mathcal{F}$, also $A'^c \in \mathcal{F}'$.
3. Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}'$ o.E. disjunkt. Dann gilt

$$X^{-1}(A_1), X^{-1}(A_2), \dots \in \mathcal{F} \quad (34)$$

und deshalb wegen $\mathcal{F}$ σ -Algebra auch

$$\bigcup_{i \geq 1} X^{-1}(A_i) \in \mathcal{F} \quad (35)$$

und damit

$$\bigcup_{i \geq 1} X^{-1}(A_i) = X^{-1}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) \in \mathcal{F} \quad (36)$$

Also ist $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}'$. Intuitiv : Das Inverse liefert eine σ -Algebra, da die Existenz der Inversen X^{-1}

die Bijektivität von X voraussetzt und die Inverse einer bijektiven Abbildung bijektiv ist.

Die Menge $\mathcal{F}''$ ist nicht notwendigerweise eine σ -Algebra. Denn für $X(A) \in \mathcal{F}''$ gilt nicht notwendigerweise $(X(A))^c \in \mathcal{F}''$, da die Identität

$$X(A^c) = X(\Omega \setminus A) = \Omega \setminus X(A) = (X(A))^c \quad (37)$$

nur für bijektive X gilt.

Genauer kann folgendes gezeigt werden : Die messbare Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \Omega'$ induziert über $\mathcal{F}'' = \{X(A) : A \in \mathcal{F}\}$ genau dann eine σ -Algebra, wenn X surjektiv ist und für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt, dass $X^{-1}(X(A)) \in \mathcal{F}$.

Im Allgemeinen gibt es zwei komplementäre σ -Algebren :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}'\} \\ \mathcal{A}_2 &:= \{A' \in \Omega' : X^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 15

Wegen der Messbarkeit von X_2 gilt, dass

$$A_3 \in \mathcal{F}_3 \implies X_2^{-1}(A_3) \in \mathcal{F}_2 \quad (38)$$

und wegen der Messbarkeit von X_1 , dass

$$A_2 \in \mathcal{F}_2 \implies X_1^{-1}(A_2) \in \mathcal{F}_1 \quad (39)$$

Also schließt man insgesamt, dass

$$A_3 \in \mathcal{F}_3 \implies (X_1^{-1} \circ X_2^{-1})(A_3) = X_1^{-1}(\underbrace{X_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{F}_2}) \in \mathcal{F}_1 \quad (40)$$

und damit, dass $X_2 \circ X_1$ messbar ist. ■

Aufgabe 16

(a). Für die Messbarkeit von $\mathbf{X} = (X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ muss, da

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma((-\infty, a] \times (-\infty, b] : a, b \in \mathbb{R}) \quad (41)$$

und gemäß Messbarkeitskriterium (1.25, p. 22), nachgeprüft werden, dass $\mathbf{X}^{-1}(R) \in \mathcal{F}$ für $R = (-\infty, a] \times (-\infty, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

Es ist aber

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{-1}(R) &= \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in R\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, a] \wedge Y(\omega) \in (-\infty, b]\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, a]\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in (-\infty, b]\} \\ &= X^{-1}((-\infty, a]) \cap Y^{-1}((-\infty, b]) \end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra ist und X bzw. Y reelle Zufallsvariablen, so folgt, dass

$$\mathbf{X}^{-1}(R) = X^{-1}((-\infty, a]) \cap Y^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{F} \quad (42)$$

und damit die Messbarkeit von $\mathbf{X}$.

(b). Die Funktionen $g_1(x, y) := x + y$ und $g_2(x, y) := xy$ sind offenbar stetig und damit messbar. Also ist die Funktion $X + Y = g_1 \circ \mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als Komposition messbarer Abbildungen messbar. Analog für $XY = g_2 \circ \mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

(c). Um zu zeigen, dass $\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ messbar ist, müssen die Urbilder $\{\omega \in \Omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) > c\}$ für beliebiges c in $\mathcal{F}$ liegen. Es kann gezeigt werden, dass

$$\{\omega \in \Omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) > c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) > c\} \quad (43)$$

Da alle X_n nach Voraussetzung Zufallsvariablen sind, ist die rechte Seite eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen und damit in $\mathcal{F}$. Also ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ eine Zufallsvariable.

Bei punktwiser Definition des limsup im Sinne von

$$(\limsup_{n \in \mathbb{N}} X_n)(\omega) := \limsup_{n \in \mathbb{N}} \{X_n(\omega)\} \quad (44)$$

folgt zusammen mit Aufgabe 1.1, dass $\limsup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \{X_n(\omega)\}$. Aus dieser Darstellung als Resultat abzählbarer Schnitte und Vereinigungen messbarer Mengen kann direkt geschlossen werden, dass $\limsup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ebenfalls messbar, d.h. eine Zufallsvariable, ist.

(d).

$$\begin{aligned}\{X = Y\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) - Y(\omega) = 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) - Y(\omega) \leq 0\} \cap \{\omega \in \Omega : X(\omega) - Y(\omega) \geq 0\}\end{aligned}$$

Nach Teil (b). ist die rechte Seite ein Schnitt messbarer Mengen und damit die Menge in $\mathcal{F}$.

Die Menge $\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \text{ existiert}\}$ ist identisch mit der Menge $\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\}$. Die Messbarkeit ergibt sich damit aus Aufgabenteilen (b), (c) und (d).

Schliesslich ergibt sich die Messbarkeit der Menge $\{X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n\}$ als Schnitt der beiden vorhergehenden Mengen aus deren Messbarkeit und der σ -Algebra-Eigenschaft von $\mathcal{F}$. ■

Aufgabe 17

(a). Es wurde gezeigt, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sowohl von den halboffenen als auch den abgeschlossenen Intervallen erzeugt wird. Sei nun $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge des Bildes, auf dem X monoton verläuft. Dann gilt $X([a, b]) = [c, d]$ für gewisse $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ nach Voraussetzung der Monotonie von X . Klarerweise gilt $[c, d] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Jedes abgeschlossene (oder offene) Intervall $A' = [a', b']$ mit $a' > -\infty, b' < \infty$ kann geschrieben werden als abzählbare Vereinigung von disjunkten Intervallen, auf denen X ist monoton ist, in der Form

$$A' = [a', b'] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n] \quad (45)$$

nach Definition von $a_0 := a'$ und $a_n := b'$ für $n \in \mathbb{N}$. Also gilt dann

$$X^{-1}(A') = X^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} [a_i, a_{i+1}]\right) = \bigcup_{i=0}^{n-1} X^{-1}([a_i, a_{i+1}]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (46)$$

aufgrund der σ -Algebra-Eigenschaft von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und der Disjunktheit der Intervalle. ■

(b). X ist differenzierbar, d.h. insbesondere stetig, und somit messbar, also eine Zufallsvariable. Die Folge

$$X_n(\omega) = \frac{X(\omega + \frac{1}{n}) - X(\omega)}{\frac{1}{n}} \quad (47)$$

ist als Komposition messbarer Funktionen messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar. Da der punktweise Grenzwert messbarer Funktionen gemäß Aufgabe 1.16 messbar ist, ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X' \quad (48)$$

messbar, also eine Zufallsvariable. ■

Aufgabe 18

(a). Offenbar ist ρ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, da klarerweise messbar und außerdem

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} -e^{-n} - (-e^0) = 1 \quad (49)$$

X ist stetig und damit messbar, also eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion von X bzgl. des WK-Maßes P mit Dichte ρ berechnet sich für $c \in X(\Omega)$ dann zu

$$F_X(c) = F_{P \circ X^{-1}}(c) = P(X \leq c) = P\left(\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1/\beta} \leq c\right) = P(x \leq \alpha c^\beta) = \int_0^{\alpha c^\beta} e^{-x} 1_{\{\alpha c^\beta\}} dx = \int_0^{\alpha c^\beta} e^{-x} dx = 1 - e^{-\alpha c^\beta}$$

und die Verteilungsdichte damit zu

$$\rho_X(c) = \frac{d}{dc} F_X = \alpha \beta c^{\beta-1} e^{-\alpha c^\beta} \quad (50)$$

■

(b). ρ ist auch in diesem Fall klarerweise messbar und es gilt

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1/\pi dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1 \quad (51)$$

X ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig und damit messbar, also eine Zufallsvariable. Somit erhält man wieder

$$\begin{aligned} F_X(c) &= F_{P \circ X^{-1}}(c) \\ &= P(X \leq c) \\ &= P(\sin^2(x) \leq c) \\ &= P(-\arcsin(\sqrt{c}) \leq x \leq \arcsin(\sqrt{c})) \\ &= \int_{-\arcsin(\sqrt{c})}^{\arcsin(\sqrt{c})} \frac{1}{\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin(\sqrt{c}) - (-\arcsin(\sqrt{c})) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{c}) \end{aligned}$$

und

$$\rho_X = \frac{d}{dc} F_X = \frac{1}{\pi \sqrt{c(1-c)}}$$

■

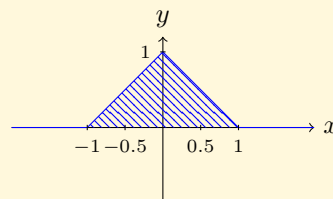
Aufgabe 19

Nach Definition gilt

$$F_P(c) = P((-\infty, c]) = \int_{(-\infty, c]} \max(1 - |x|, 0) dx \quad (52)$$

Die Dichte $p(x) := \max(1 - |x|, 0)$ ist auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine stückweise monotone Funktion mit alternativer Darstellung

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin (-1, 1) \\ 1 - |x| & \text{für } x \in (-1, 1) \end{cases} \quad (53)$$



Gemäß Aufgabe 17 ist eine solche stückweise monotone Funktion messbar. Nach Integration erhält man

$$F_P(c) = \begin{cases} 0 & \text{für } c \leq -1 \\ \frac{1}{2} + c\left(1 - \frac{|c|}{2}\right) & \text{für } -1 < c < 1 \\ 1 & \text{für } c \geq 1 \end{cases} \quad (54)$$

Wegen $F'(c) = 1 - |c|$ gilt $F'(c) > 0$ für $-1 < c < 1$. Damit ist F auf dem Intervall $(-1, 1)$ streng monoton wachsend und also invertierbar mit $X(u) := F^{-1}(u) = c$. Im Folgenden wird ein expliziter Ausdruck für F^{-1} hergeleitet. ■

Es ist

$$\begin{aligned} F(c) &= u \\ \iff \frac{1}{2} + c\left(1 - \frac{|c|}{2}\right) &= u \\ \iff c\left(1 - \frac{|c|}{2}\right) + 1/2 - u &= 0 \\ \iff c|c| - 2c - 1 + 2u &= 0 \\ \iff c = 1 - \sqrt{2\sqrt{1-u}} \vee c = \sqrt{2\sqrt{1-u}} + 1 \vee c = -\sqrt{2\sqrt{u}} - 1 \vee c = \sqrt{2\sqrt{u}} - 1 \end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass $-1 < c < 1$ fallen die Kandidaten 2 und 3 weg. Umgekehrt sind die Kandidaten 1 und 4 streng monoton steigend, sodass für $u \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - \sqrt{2} < 1 - \sqrt{2\sqrt{1-u}} < 1 \\ -1 &< \sqrt{2\sqrt{u}} - 1 < \sqrt{2} - 1 < 1 \end{aligned}$$

Beide Kandidaten schneiden sich im Punkt $u = 1/2$. Also erhält man schließlich, dass für $0 < c < 1$ und $u \in (0, 1)$ gilt

$$X(u) = F^{-1}(u) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2\sqrt{1-u}} & 1/2 < u < 1 \\ \sqrt{2\sqrt{u}} - 1 & 0 < u \leq 1/2 \end{cases} \quad (55)$$

Aufgabe 20

F ist monoton wachsend wenn $c_1 \geq c_2 \implies F(c_1) \geq F(c_2)$. Für $c_1 \geq c_2$ gilt aber

$$F(c_1) = P((-\infty, c_1)) = P((-\infty, c_2) \cup [c_2, c_1]) = P((-\infty, c_2]) + P([c_2, c_1]) = F(c_2) + d \quad (56)$$

mit $d \geq 0$ nach Definition von P . Damit folgt $F(c_1) \geq F(c_2)$.

Die Rechtsstetigkeit folgt aus der σ -Stetigkeit von P aus Satz 1.11, denn für $A_n := (-\infty, c_1 - \frac{1}{n}]$ gilt $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, c_1]$. Für die Folge $s_n := c_1 - \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c_1$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P((-\infty, s_n]) = P((-\infty, c_1]) = P((-\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n]) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n) \quad (57)$$

also die Rechtsstetigkeit von F . Bezüglich Grenzwertbildung gilt aufgrund der Eigenschaften von P als Wahrscheinlichkeitsmaß und der Rechtsstetigkeit :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow -\infty} F(c) &= \lim_{c \rightarrow -\infty} P((-\infty, c]) = P((-\infty, -\infty]) = 0 \\ \lim_{c \rightarrow \infty} F(c) &= \lim_{c \rightarrow \infty} P((-\infty, c]) = P((-\infty, \infty]) = P(\mathbb{R}) = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 21

Gegeben sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit F_X stetig, d.h. F_X ist insbesondere linksstetig. Außerdem sei $F : X(\mathbb{R}) \rightarrow (0, 1)$ mit $F = F_X$. Dann gilt für beliebiges $c \in (0, 1)$, dass

$$F_{F_X}(c) = P(F(X) \leq c) = P(X \leq F^{-1}(c)) = F_X(F^{-1}(c)) = c \quad (58)$$

Also gilt $F(X) \sim \mathcal{U}_{(0,1)}$. Für eine genaue Argumentation, warum die zusätzliche Linkstetigkeit von F notwendig ist, vgl. Embrechts & Hofert (2014). ■