
LÖSUNGEN ZU
HANS-OTTO GEORGII: STOCHASTIK

— KAPITEL 2 —

TIM KOPISCHKE
11/2020

Aufgabe 1 : ✓
Aufgabe 2 : ✓
Aufgabe 3 : ✓
Aufgabe 4 : ✓
Aufgabe 5 : ✓
Aufgabe 6 : ✓
Aufgabe 7 : ✓

Aufgabe 8 : ✓
Aufgabe 9 : ✓
Aufgabe 10 : ✓
Aufgabe 11 : ✓
Aufgabe 12 : ✗
Aufgabe 13 : ✓
Aufgabe 14 : ✓

Aufgabe 15 : ✓
Aufgabe 16 : ✗
Aufgabe 17 : ✓
Aufgabe 18 : ✓
Aufgabe 19 : ✗
Aufgabe 20 : ✗

Aufgabe 1

Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Frau an einem der sieben Wochentage Geburtstag zu haben für alle Wochentage gleich groß ist. Das darunterliegende Wahrscheinlichkeitsmaß ist somit die Gleichverteilung. Der ursprüngliche Ergebnisraum der n anwesenden Damen D_j mit $j \in \{1, \dots, n\}$ ist also

$$\Omega_0 = \{(D_1, D_2, \dots, D_n) : D_j \in \{\text{Mo}, \dots, \text{So}\}, n \in \mathbb{N}\} \quad (1)$$

Eine erste Zufallsvariable, die diesen Ergebnisraum passend einschränkt, ist gegeben durch

$$S_1 : \Omega_0 \rightarrow \Omega_1, D = (D_1, D_2, \dots, D_n) \mapsto \tilde{D} = (\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n) \quad (2)$$

mit $\tilde{D}_j \in \{\text{So}, \neg\text{So}\}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Nach Umkodierung zu $\text{So} = 1$ und $\neg\text{So} = 0$ erhalten wir die kürzere Darstellung

$$\Omega_1 = \{0, 1\}^n \quad (3)$$

Da nur die Anzahl und nicht die Reihenfolge der Geburtstage relevant ist, wird Ω_1 weiter eingeschränkt zu

$$S_2 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 = \{0, \dots, n\}, \tilde{D} \mapsto \sum_{j=1}^n \tilde{D}_j \quad (4)$$

Eine Dame kann – nachdem der Wochentag erfragt wurde – nicht noch einmal befragt werden. Somit ist das Modell kein reines Urnenmodell mit Zurücklegen. Da die Anzahl der Damen aber im Vergleich zur Anzahl der Ziehungen sehr groß ist, kann dies ungefähr als Binomialverteilung statt als hypergeometrische Verteilung aufgefasst werden.

Vor der analytischen Herleitung der Lösung sei ein beispielhafter R Code zur Simulation der Frage vorangestellt, der zur praktischen Beantwortung der Frage herangezogen werden kann.

Der Code

```
Verteilung = replicate(1000000, {  
  i = 1  
  repeat{  
    Wochentag = sample(c("Mo", "Di", "Mi", "Do", "Fr", "Sa", "So"),  
                      size = 1,  
                      replace = TRUE,  
                      prob = rep(1/7, 7))  
  }  
})
```

```

if(Wochentag == "So") {return(i); break;}
i = i + 1
    }
    }
)
quantile(Verteilung, p = 0.99)

```

lässt eine Million Mal so oft aus den Wochentagen ziehen bis ein Sonntag gezogen wurde und notiert sich die Anzahl der Züge, die dafür notwendig waren. Dann wird auf der Verteilung der Ziehungsanzahlen das 99%-Quantil gebildet. Das Quantil der Simulation sollte uns schon sehr genau die Anzahl von Frauen sagen, die notwendig sind, damit wenigstens ein Sonntagskind darunter ist. Bei Ausführung erhalten wir

```

> quantile(Verteilung, p = 0.99)
99 %
30

```

Nach Simulationsergebnissen sind also wenigstens 30 Damen notwendig, damit mit 99%iger Sicherheit wenigstens eine an einem Sonntag Geburtstag hat.

Dieses Simulationsergebnis lässt sich wie folgt analytisch zeigen. Aufgrund der Definition von S_2 liegt eine Binomialverteilung vor mit

$$\mathbb{B}_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (5)$$

für $k \in \{0, \dots, n\}$. Das Ereignis

$$\{S_2(\tilde{D}) \geq 1\} = (\{S_2(\tilde{D}) = 0\})^c \quad (6)$$

ist klarerweise Element von $\mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n\})$. Sei P_2 das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω_2 . Also erhalten wir die Forderung

$$\begin{aligned}
 P'(\text{Anzahl Sonntagskind} \geq 1) &= 1 - P'(\text{Anzahl Sonntagskind} = 0) \\
 &= 1 - (P \circ S_1^{-1} \circ S_2^{-1})(0) \\
 &= 1 - \mathbb{B}_{n,1/7}(0) \\
 &= 1 - \binom{n}{0} (1/7)^0 (6/7)^n \\
 &\stackrel{!}{\geq} 0.99
 \end{aligned}$$

Nach Auflösung nach n erhält man, dass $n \geq 30$. D.h. es müssen wenigstens 30 Damen anwesend sein, damit wenigstens eine von Ihnen an einem Sonntag Geburtstag hat. Dies deckt sich mit den Simulationsergebnissen von oben. ■

Aufgabe 2

Es ist bekannt, dass $|\mathcal{S}_n| = n!$. Sei $\hat{\Omega} = \{1, \dots, n\}$ und L definiert als

$$L : \mathcal{S}_n \rightarrow \hat{\Omega}, \quad L(\pi) = \min\{1 \leq j \leq n : \pi^j(1) = 1\} \quad (7)$$

Für $L(\pi) = 1$ muss also $\pi(1) = 1$ gelten. Alle $n-1$ weiteren Elemente der Permutation sind frei wählbar. $n-1$ Elemente sind auf $(n-1)!$ verschiedene Arten anordenbar. Also gibt es $(n-1)!$ Permutationen für die $L(\pi) = 1$ gilt. Für $L(\pi) = 2$ muss $\pi(1) = k$ mit $k \in \{2, \dots, n\}$ aber insbesondere $k \neq 1$ gelten. Andererseits gilt aber wieder $\pi(k) = 1$ wegen $L(\pi) = 2$. Es gibt $n-1$ Möglichkeiten k zu wählen, eine Möglichkeit $\pi(k)$ zu wählen (nämlich $\pi(k) = 1$) und wiederum $(n-2)!$ Möglichkeiten, die restlichen $n-2$ Elemente anzuordnen. Also gibt es auch $(n-1)!$ Permutationen mit $L(\pi) = 2$. Induktiv gilt, dass es für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ $(n-1)!$ Permutationen mit $L(\pi) = k$ gibt.

Sei nun $A = \{\pi \in \mathcal{S}_n : L(\pi) = k\}$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann impliziert das obige Resultat

$$P_{\hat{\Omega}}(A) = (P_{\mathcal{S}_n} \circ L^{-1})(k) = P_{\mathcal{S}_n}(L^{-1}(k)) = \frac{|A|}{|\mathcal{S}_n|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|} \quad (8)$$

und damit die Gleichverteilung der Zyklenlängen von Zyklen, die durch die 1 gehen, bei gleichverteilten Permutationen von n Elementen. ■

Aufgabe 3

Der Ausgangsraum ist $\Omega = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}_+^N : \sum_{i=1}^N m_i = n\}$ mit der Ausgangslage, dass wir $N \in \mathbb{N}$ Fächer für $n \in \mathbb{N}$ Teilchen besitzen und N_a dieser N Fächer ein bestimmtes Energieniveau $a \in E$ besitzen. Insgesamt gibt es $|E|$ Energieniveaus mit E endlich und somit $N = \sum_{a \in E} N_a$.

Der Zielraum der Zufallsvariable ist

$$\hat{\Omega} = \{\vec{k} \in \mathbb{Z}_+^{|E|} : \sum_{i=1}^{|E|} k_i = n\} \quad (9)$$

d.h. die Fächeraufteilung selbst wird vergessen und stattdessen nur die Anzahl der Teilchen je Energielevel gezählt.

Definiere

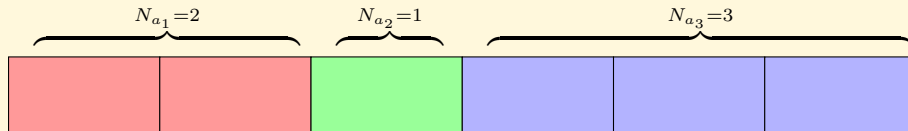
$$X : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}, \quad (10)$$

Dann gilt

$$P'(\{\vec{k}\}) = P(X^{-1}(\vec{k})) = \frac{|\{X(\omega) = \vec{k}\}|}{|\Omega|} = \frac{|\{X(\omega) = \vec{k}\}|}{\binom{n+N-1}{n}} \quad (11)$$

Die Zahl $|\{X(\omega) = \vec{k}\}|$ ist die Anzahl der Konfigurationen der n Teilchen in den N Fächern so, dass k_{a_1} das Energieniveau a_1 haben, k_{a_2} das Energieniveau a_2 , usw. ...

Zur Veranschaulichung sei $N = 6$ und $|E| = 3$ mit $N_{a_1} = 2, N_{a_2} = 1$ und $N_{a_3} = 3$.



Da die Reihenfolge der Energieniveaus für die Aufgabe irrelevant ist, kann angenommen werden, dass alle Energieniveaus separat nebeneinander liegen. Es ist bekannt, dass k_{a_1} Teilchen das Energieniveau a_1 besitzen. Somit müssen diese auf die $N_{a_1} = 2$ Kästchen aufgeteilt werden. Dies entspricht wiederum dem Problem aus k_{a_1} Teilchen und $N_{a_1} - 1 = 1$ Trennwänden auszuwählen, d.h. die Anzahl ist $\binom{k_{a_1} + N_{a_1} - 1}{k_{a_1}}$. Für $k_{a_1} = 4$ gäbe es z.B. die $\binom{4+1}{4} = 5$ Möglichkeiten

$$\dots | \quad (12)$$

$$\dots | \cdot \quad (13)$$

$$\cdot | \dots \quad (14)$$

$$\cdot | \dots \quad (15)$$

$$| \dots \quad (16)$$

$$(17)$$

Somit gilt, dass $|\{X(\omega) = \vec{k}\}| = \prod_{a \in E} \binom{k_a + N_a - 1}{k_a}$ und

$$P'(\{\vec{k}\}) = \frac{\prod_{a \in E} \binom{k_a + N_a - 1}{k_a}}{\binom{n+N-1}{n}} \quad (18)$$

■

Aufgabe 4

(a). Ein direkter Zugang, entsprechend den Ausführungen Georgiis im Text, ist den Anteil aller *günstigen* Ereignisse durch den Anteil aller *möglichen* Ereignisse als die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Ein günstiges Ereignis ist in diesem Fall einen Sehnenmittelpunkt zu ziehen, der eine Entfernung von x oder weniger vom Kreismittelpunkt hat. Doch die Menge all dieser Punkte ist gerade der Kreis um den Kreismittelpunkt mit Radius x , die nach Annahme alle gleich wahrscheinlich gezogen werden und damit die Fläche πx^2 . Die Anzahl der möglichen Fälle umgekehrt ist die Menge aller Punkte im Kreis mit Radius r was klarerweise der Fläche des Kreises, d.h. πr^2 entspricht. Somit hat man

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \left(\frac{x}{r}\right)^2 \quad (19)$$

und

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{2x}{r^2} \quad (20)$$

was wieder Georgiis Lösung entspricht.

(b). Die Lösung der Aufgabe ist, ähnlich wie die in einem meiner Blogposts dargestellte Approximation von π durch ein- und umbeschriebene Dreiecke, so geometrisch gestaltet, dass eine Skizze unausweichlich ist. Sei also r der Radius des Kreises und X der (durch den zufälligen Winkel ebenfalls zufällige) Abstand von Kreismittelpunkt zum Mittelpunkt der gezogenen Sehne.

Gemäß der Skizze ist klar, dass aufgrund trigonometrischer Überlegungen $\hat{\alpha} = \arccos(\frac{X}{r})$ gilt und damit für den Gesamtwinkel $\alpha = 2\hat{\alpha} = 2 \arccos(\frac{X}{r})$. Umgekehrt ist also $X = \cos(\frac{\alpha}{2})r$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Abstand $X \leq x$ mit $x \in [0, r]$ ist demnach

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\cos(\frac{\alpha}{2})r \leq x) = P(\alpha \geq 2 \arccos(\frac{x}{r})) = 1 - P(\alpha < 2 \arccos(\frac{x}{r})) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte entsprechend

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \frac{1}{r} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

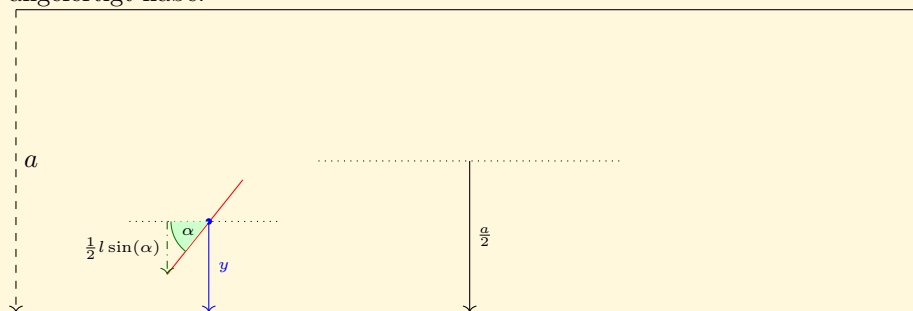
■

Diese Lösung stimmt mit der Georgiis überein — der diese jedoch ohne jeglichen Lösungsweg lediglich aufgelistet hat.

Aufgabe 5

Dies ist eine klassische Aufgabe in elementarer Wahrscheinlichkeitstheorie und hundertfach gelöst worden mit vielen möglichen Herleitungen, auf elementarem und fortgeschrittenem Weg. Es gibt sogar eine eigene Wikipedia-Seite für das Problem mit Beweis.

Wir verfolgen einen ähnlichen Beweis, der sich auf untenstehende Skizze stützt, die ich in TikZ angefertigt habe.



Georgii hat als Hinweis gegeben, das Modell vom Abstand Y des Nadelmittelpunkts zur nächsten Geraden sowie des in Bezug auf den Mittelpunkt der Nadel erscheinenden Winkels α abhängig

zu machen. Anhand der Skizze ist klar erkennbar, dass $0 \leq \alpha \leq \pi$ und $0 \leq Y \leq \frac{a}{2}$. Wenn wir annehmen, dass sowohl der Winkel α als auch der Abstand Y auf ihren jeweiligen Intervallen gleich verteilt sind, folgt, dass $f_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi}$ für alle $0 \leq \theta \leq \pi$ und $f_Y(y) = \frac{1}{a/2} = \frac{2}{a}$. Zur Vereinfachung sei weiter angenommen, dass Winkel und Position des Mittelpunktes voneinander unabhängig sind. Dies ist plausibel, da ein bestimmter Winkel auf der gesamten Strecke $[0, \frac{a}{2}]$ gleich wahrscheinlich ist und umgekehrt ein bestimmter Mittelpunkt nichts darüber aussagt, welcher Winkel angenommen werden kann. Also hat man $f_{Y,\alpha}(y, \theta) = \frac{2}{\pi a}$.

Die Nadel berührt nun eine der parallelen Linien falls die Auslenkung der Nadel in Richtung der näherliegenden Linie größer ist als der Abstand des Nadelmittelpunktes zu dieser Linie. Anders ausgedrückt, wenn

$$y - \frac{1}{2}l \sin(\alpha) \leq 0 \iff y \leq \frac{1}{2}l \sin(\alpha) \quad (21)$$

Die Länge der Auslenkung, $\frac{1}{2}l \sin(\alpha)$, ergibt sich mittels elementarer Trigonometrie.

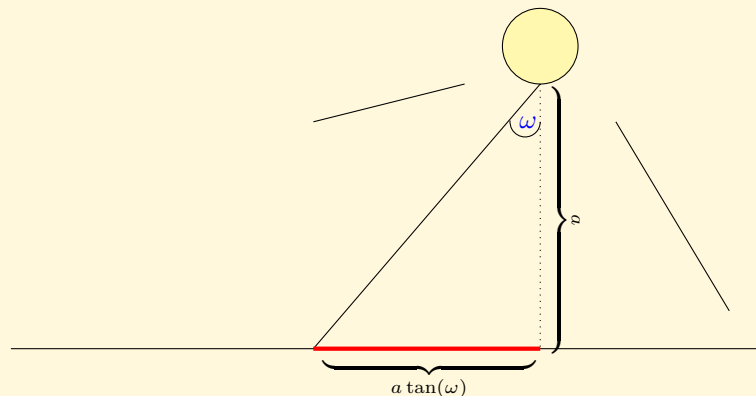
Somit müssen nun über alle Winkel $0 \leq \alpha \leq \pi$ und alle Punkte $0 \leq y \leq \frac{a}{2}$, die die Bedingung $y \leq \frac{1}{2}l \sin(\alpha)$ erfüllen, die Dichten aufaddiert werden um die Gesamtwahrscheinlichkeit des Berührens einer Linie zu erhalten. Dies ist aber gleichbedeutend mit Integration über diese Wertemengen, d.h.

$$P = \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}l \sin(\alpha)} \frac{2}{\pi a} d\alpha dy = \int_0^\pi \frac{1}{\pi a} l \sin(\alpha) d\alpha = \frac{2l}{\pi a} \quad (22)$$

■

Aufgabe 6

Eine grundlegende Information, die sich aus der Aufgabenstellung erschließen muss, ist, dass der Winkel ω , unter dem der Lichtstrahl von der Glühbirne abstrahlt, auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gleichverteilt ist.



Durch die Skizze oben sieht man ein, dass die gesuchte Zufallsvariable, die dem (zufälligen) Winkel ω die Länge X zuordnet, durch $X(\omega) = a \cdot \tan(\omega)$ gegeben ist.

Für die Zufallsvariable X ergibt sich deshalb die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(a \cdot \tan(\omega) \leq x) \\ &= P(\omega \leq \arctan\left(\frac{x}{a}\right)) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

da ω als gleichverteilt in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ angenommen wird. Da diese Verteilungsfunktion offenbar stetig differenzierbar ist, ist die Verteilungsdichte

$$\frac{d}{dx} F_X = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) \frac{1}{a} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{a^2}{a^2 + x^2} \right) \frac{1}{a} = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \quad (23)$$

■

Aufgabe 7

Die Wahrscheinlichkeit, dass während der Untersuchung der 100 Personen mehr als drei das Krankheitsbild zeigen ist gemäß Annahme für alle zehn Kraftwerke gleich. Die weitere Modellannahme "Ziehen mit Zurücklegen" legt die Anwendung einer Binomialverteilung mit den beiden Klassen "Krank" und "Nicht krank" nahe. Die Wahrscheinlichkeit p der Binomialverteilung variiert in den Aufgabenteilen (a) und (b).

(a). Gemäß Angabe ist die Erkrankungswahrscheinlichkeit so hoch wie im Bundesdurchschnitt, d.h. 1%. Somit gilt $p = 0.01$ und man erhält für die Wahrscheinlichkeit $k \geq 3$ Personen mit Krankheitsbild an einem der Kraftwerke $A_1, \dots, A_{10}$ vorzufinden,

$$\begin{aligned} P_A(k \geq 3) &= 1 - P_A(k \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^2 \binom{100}{i} (0.01)^i (0.99)^{100-i} \\ &= 1 - 0.99^{100} - 100 \cdot 0.01 \cdot 0.99^{99} - \binom{100}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{98} \\ &= 7.9\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kraftwerk auffällig ist, liegt also bei 7.9% und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kraftwerk nicht auffällig ist demnach bei 92.1%. Die Anzahl von auffälligen Kraftwerken ist damit auch binomialverteilt mit $p = 7.9\%$ und man erhält letztlich für die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl S_A von auffälligen Kraftwerken größer 1 ist

$$\begin{aligned} P_S(S_A \geq 1) &= 1 - P_S(S_A = 0) \\ &= 1 - \binom{10}{0} (0.079)^0 (0.921)^{10} \\ &= 56\% \end{aligned}$$

■

(b). Nun hat sich die Erkrankungswahrscheinlichkeit um die Kraftwerke herum geändert. Die Wahrscheinlichkeit eines Kraftwerks auffällig zu werden ist nun

$$\begin{aligned} P_A(k \geq 3) &= 1 - P_A(k \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^2 \binom{100}{i} (0.02)^i (0.98)^{100-i} \\ &= 1 - 0.98^{100} - 100 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{99} - \binom{100}{2} \cdot 0.02^2 \cdot 0.98^{98} \\ &= 32\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kraftwerk auffällig ist, liegt nun also bei 32% und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kraftwerk nicht auffällig ist demnach bei 68%. Insgesamt hat man also für die Wahrscheinlichkeit, dass gar kein Kraftwerk auffällig wird unter diesen Annahmen

$$P_S(S_A = 0) = \binom{10}{0} (0.32)^0 (0.68)^{10} = 2.1\% \quad (24)$$

■

Aufgabe 8

Für die zweite Ziehung ist die Wahrscheinlichkeit eine andere Nummer als die bereits gezogene zu ziehen gleich $\frac{N-1}{N}$, für die dritte Ziehung ist die Wahrscheinlichkeit eine neue Nummer zu ziehen $\frac{N-2}{N}$, Also ist die Wahrscheinlichkeit bei n Ziehungen stets paarweise verschiedene Nummern zu ziehen gerade $\frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \dots \frac{N-(n-1)}{N}$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit mindestens eine Nummer doppelt zu ziehen das Gegenereignis hiervon,

$$\begin{aligned} p(n, N) &= 1 - \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \dots \frac{N-(n-1)}{N} \\ &= 1 - \frac{(N-1) \dots (N-(n-1))}{N^n} \\ &= 1 - \frac{N^n (1 - \frac{1}{N}) (1 - \frac{2}{N}) \dots (1 - \frac{n-1}{N})}{N^n} \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{N}) \dots (1 - \frac{n-1}{N}) \\ &\geq 1 - \exp(-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n-1} i) \\ &= 1 - \exp(-\frac{1}{N} \frac{n(n-1)}{2}) \end{aligned}$$

(a). Es ist $N = 365$ und n gesucht. Es soll gelten

$$p(n, 365) \geq 1 - \exp(-\frac{1}{365} \frac{n(n-1)}{2}) \stackrel{!}{=} 0.5 \quad (25)$$

Nach Auflösen der Gleichung nach n erhält man $n = 23$.

(b). Es ist $N = 14000000$ und $n = 3016$. Damit erhält man

$$p(3016, 14000000) \geq 1 - \exp(-\frac{1}{14000000} \frac{3016 \cdot 3015}{2}) \approx 27.72\% \quad (26)$$

Aufgabe 9

(a). Die folgende Lösung der Aufgabe baut auf Georgii's Lösung und dem sehr aufschlussreichen Expositions-papier von Sven Erick Alm bezüglich einfachen Irrfahrten (Sven Erick Alm (2002) : Simple Random Walk) auf. Wie bei vielen anderen Aufgaben auch ist die von Georgii angegebene Lösung äußerst knapp und erwähnt viele Sachverhalte nicht explizit.

Ausgangspunkt ist der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega = \{-1, 1\}^{2n}, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{U}_\Omega)$. Nach Auftragen der Irrfahrt in einem Zeit-Stimmenzahl-Diagramm kann man das angesprochene Ereignis G_n auffassen als eine Menge von Pfaden, die in $(0, 0)$ starten und nach $2n$ Schritten im Punkt $(2n, 0)$ ankommen ohne jemals einen der Punkte $(k, 0)$ für $1 \leq k < n$ zu durchlaufen, d.h. die x -Achse zu treffen.

Zur Formalisierung des Problems kann man mehrere Größen einführen. $p = \frac{1}{2}$ sei die Wahrscheinlichkeit für einen Aufwärtsschritt und $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ für einen Abwärtsschritt. Ein Pfad, der in $(0, a)$ startet und nach n Schritten im Punkt (n, b) ankommt, kann charakterisiert werden durch h Aufwärtsschritte und v Abwärtsschritte. Diese erfüllen zwingend folgende Zusammenhänge :

$$\begin{aligned} h + v &= n \\ h - v &= b - a \end{aligned}$$

Man erhält mittels Auflösung nach v bzw. h , dass $h = \frac{n+(b-a)}{2}$ und $v = \frac{n-(b-a)}{2}$. Die Anzahl der Möglichkeiten in n Schritten h Aufwärtsschritte durchzuführen, ist $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h} = \binom{n}{v}$. Gemäß Gleichverteilungsannahme ist also die Wahrscheinlichkeit in n Schritten von Punkt a zum Punkt b zu kommen gleich $P_n(a, b) = \binom{n}{h} p^h q^v$. $\binom{n}{h}$ berücksichtigt noch keine Beschränkungen hinsichtlich des Besuchs der x -Achse.

Sei nun $N_n(a, b)$ die Anzahl der Pfade von a nach b in n Schritten, $N_n^{\neq 0}(a, b)$ die Anzahl der Pfade von a nach b , die die x -Achse nicht treffen und $N^0(a, b)$ die Anzahl der Pfade von a nach b die letzteres tun. Es wurde bereits gezeigt, dass $N_n(a, b) = \binom{n}{h}$. Klarerweise gilt weiterhin dass

$$N_n(a, b) = N_n^0(a, b) + N_n^{\neq 0}(a, b) \quad (27)$$

und $N_n^0(a, b) = N_n(a, b)$ falls $\text{sgn}(a) \neq \text{sgn}(b)$. Mit den bisherigen Ausführungen ist also bereits klar, dass

$$P(G_n) = N_{2n}^{\neq 0}(0, 0) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \quad (28)$$

Es ist aber

$$N_{2n}^{\neq 0}(0, 0) = N_{2n-1}^{\neq 0}(1, 0) + N_{2n-1}^{\neq 0}(-1, 0) = 2 \cdot N_{2n-1}^{\neq 0}(1, 0) = 2 \cdot N_{2n-2}^{\neq 0}(1, 1) \quad (29)$$

denn es können beide Kandidaten die ganze Zeit über in Führung liegen, d.h. der Graph kann ober- oder unterhalb der x -Achse liegen und somit von 1 (Kandidat A) nach 0 oder von -1 (Kandidat B) nach 0 in $2n - 1$ Schritten wandern. Da ein Pfad oberhalb der x -Achse immer als Spiegelbild eines passenden Graphen unterhalb der x -Achse aufgefasst werden kann, sind die Anzahlen gleich und werden verdoppelt. Schließlich gibt es genauso viele Pfade, die in $2n - 1$ Schritten von 1 nach 0 wandern wie es Pfade gibt, die in $2n - 2$ Schritten von 1 nach 1 wandern. Der Grund dafür ist, dass der $2n - 1$. Schritt als Abwärtsschritt von 1 nach 0 fest vorgegeben ist.

Nun muss das Spiegelprinzip verwendet werden : Ein Pfad, der zwischen den Punktkoordinaten $(1, 1)$ und $(2n - 2, 1)$ die x -Achse schneidet, kann durch Spiegelung des Graphen bis zur ersten Nullstelle an der x -Achse dargestellt werden als ein Pfad, der in $(1, -1)$ startet und nach $(2n - 2, 1)$ führt. Somit erhält man dann

$$N_{2n-2}^{\neq 0}(1, 1) = N_{2n-2}(1, 1) - N_{2n-2}^0(1, 1) = N_{2n-2}(1, 1) - N_{2n-2}(-1, 1) = \binom{2n-2}{h_1} - \binom{2n-2}{h_2} \quad (30)$$

Mit der obigen Formel für h erhält man dann aber $h_1 = \frac{2n-2+(1-1)}{2} = n - 1$ und $h_2 = \frac{2n-2-(1-(-1))}{2} = n$. Insgesamt erhält man also

$$N_{2n-2}^{\neq 0}(1, 1) = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} \quad (31)$$

und

$$P(G_n) = N_{2n}^{\neq 0}(0, 0) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 2 \cdot N_{2n-2}^{\neq 0}(1, 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 2^{-2n+1} \left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} \right) \quad (32)$$

(b). Gemäß Lösungshinweis von Georgii muss man das Gegenereignis $G_{>n}^c$ betrachten. Dann gilt aufgrund der Disjunktheit der G_n für unterschiedliche n (die intuitiv klar ist), dass

$$\begin{aligned} P(G_{>n}) &= P\left((G_{>n}^c)^c\right) \\ &= 1 - P(G_{>n}^c) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n P(G_k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n (u_{k-1} - u_k) \\ &= u_n \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Teleskopeigenschaft der Summe zusammen mit $u_0 = 1$ ausgenutzt.

Aufgabe 10

Sei ω der Punkt, der zufällig in $(0, 1)$ markiert wird. Wegen $0 < \omega < 1$ ist $l_1 = \omega$ und $l_2 = 2 - \omega$. Definiere nun $X := \frac{\omega}{2-\omega}$. Dann gilt für ein beliebiges $c \in (0, 1)$

$$F_X(c) = P(Y \leq c) = P\left(\frac{\omega}{2-\omega} \leq c\right) = P\left(\omega \leq \frac{2}{\frac{1}{c}+1}\right) = \frac{2}{\frac{1}{c}+1} = \frac{2c}{c+1} \quad (33)$$

und damit

$$\rho_X(c) = \frac{d}{dc} F_X = \frac{2}{c+1} - \frac{2c}{(c+1)^2} = \frac{2(c+1) - 2c}{(c+1)^2} = 2(c+1)^{-2} \quad (34)$$

Aufgabe 11

Es sind $m = 7000$ Abschnitte, die als Farben gedeutet werden können und $M = 23000$ Basenpaare je Abschnitt (oder Farbe). Also gibt es insgesamt $N = mM$ Basenpaare, die im Folgenden auch als Kugeln einer Urne (des *Genoms*) betrachtet werden können.

Aufgrund dieses Setups kann die hochenergetische Bestrahlung und Zerstörung von Basenpaaren als Ziehen von Kugeln (= Basenpaaren) aus der Urne (= des Genoms) ohne Zurücklegen betrachtet werden, bei der nur die Farbe (= der Abschnitt) dokumentiert wird. Man erhält auf diese Weise ein hypergeometrisches Verteilungsmodell mit

$$\mathcal{H}_{1000, \vec{N}}(\{\vec{k}\}) = \frac{\prod_{i=1}^{7000} \binom{23000}{k_i}}{\binom{23000 \cdot 7000}{1000}} \quad (35)$$

und $\sum_{i=1}^{7000} k_i = 1000$. Es ist $\vec{N} = (23000, \dots, 23000)$ und $\vec{k} = (k_1, \dots, k_{7000})$ der Vektor aller Anzahlen zerstörter Basenpaare für alle Abschnitte.

Für jeden Abschnitt i ist die Verteilung der Anzahl Z_i zerstörter Basenpaare gleich, da jeder Abschnitt gleich viele Basenpaare enthält und jeder Abschnitt gleich wahrscheinlich von hochenergetischer Strahlung getroffen wird. Pro Abschnitt i ist diese Verteilung gegeben durch eine Binomialverteilung: Ein Abschnitt wird nach Voraussetzung mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{7000}$ von hochenergetischer Strahlung getroffen, die dann irgendeines der 23000 Basenpaare zerstört. Somit erhält man für $k \in \{0, \dots, 1000\}$

$$P(Z_i = k) = \binom{1000}{k} \left(\frac{1}{7000}\right)^k \left(\frac{6999}{7000}\right)^{1000-k} \quad (36)$$

Setzt man nun $\lambda := 1000 \frac{1}{7000} = \frac{1}{7} > 0$ und wendet Satz (2.19) über die Poisson-Approximation der Binomialverteilung an, dann folgt, dass Z_i approximativ $\mathcal{P}_{1/7}$ -verteilt ist.

Aufgabe 13

Klarerweise gilt $\Omega = \mathcal{S}^n$. Zur Lösung der Aufgabe wird die Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \{0, \dots, n\}$ mit $X(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{\{i=\pi(i)\}}$ betrachtet, die jeder Permutation die Anzahl ihrer Fixpunkte zuordnet. Aufgrund der bekannten Gleichverteilungsannahme auf Ω mit $P_\Omega = \mathcal{U}_\Omega$ gilt dann

$$P_X(k) = P_\Omega(X^{-1}(k)) = \frac{|X(\omega) = k|}{|\Omega|} = \frac{|X(\omega) = k|}{N!} \quad (37)$$

Die Aufgabe reduziert sich somit auf die Frage eine Darstellung für die Anzahl aller Permutationen einer Menge N mit k Fixpunkten herzuleiten.

Sei $T^{0,N}$ definiert als die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen einer Menge N . Dies sind also alle Permutationen, die weder einen, zwei, drei, ..., $N-1 = N$ Fixpunkte haben.

Für beliebige N entstehen diese Permutationen daraus, dass man ein, zwei, ..., k Elemente der Menge fixiert und die restlichen $N-k$ Elemente so permutiert, dass kein Fixpunkt entsteht. Da

man aus N Elementen $\binom{N}{1} = N$ wechselseitig verschiedene 1-elementige Teilmengen enthält, gibt es also $\binom{N}{1} T^{0,N-1}$ Permutationen von N Elementen, die genau einen Fixpunkt besitzen. Analog erhält man, dass es $\binom{N}{2} T^{0,N-2}$ zweielementige Teilmengen mit genau 2 Permutationen gibt und so weiter.

Im Umkehrschluss erhält man so, dass

$$T^{0,N} = N! - \binom{N}{1} T^{0,N-1} - \binom{N}{2} T^{0,N-2} - \dots \quad (38)$$

Diese Darstellung ist aber rekursiv und kann somit in folgende Matrixform umgewandelt werden,

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T^{0,N} \\ T^{0,N-1} \\ \vdots \\ T^{0,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N! \\ (N-1)! \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \binom{N}{1} & \binom{N}{2} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \binom{N-1}{1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{0,N} \\ T^{0,N-1} \\ \vdots \\ T^{0,1} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Nach weiteren Umformungen hat $\vec{T}$ dann die Gestalt

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & \binom{N}{1} & \binom{N}{2} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \binom{N-1}{1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N! \\ (N-1)! \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Die Matrix ist eine Pascal-Matrix mit bekannter Inverse

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \binom{N}{1} & \binom{N}{2} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \binom{N-1}{1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\binom{N}{1} & \binom{N}{2} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -\binom{N-1}{1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{j+1} M_{ij} \quad (41)$$

sodass man letztlich $T^{0,N}$ erhält als

$$T^{0,N} = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} (N-i)! \quad (42)$$

Auf dieser Basis ist die Anzahl der Permutationen mit k Fixpunkten nun sehr leicht zu bestimmen als

$$|\{X = k\}| = \binom{N}{k} T^{0,N-k} = \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (N-k-i)! \quad (43)$$

und damit insgesamt die anfangs gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P_X(k) &= P_\Omega(X^{-1}(k)) \\ &= \frac{|\{X(\omega) = k\}|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|\{X(\omega) = k\}|}{N!} \\ &= \frac{\binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (N-k-i)!}{N!} \\ &= \frac{1}{k!(N-k)!} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (N-k-i)! \\ &= \frac{1}{k!(N-k)!} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \frac{(N-k)!}{i!(N-k-i)!} (N-k-i)! \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \frac{1}{i!} \end{aligned}$$

Beispielsweise erhält man für $N = 5$ Mäntel und $k = 1$ die Wahrscheinlichkeit

$$P_X(1) = \frac{1}{1!} \sum_{i=0}^4 (-1)^i \frac{1}{i!} = 1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24 = 9/24 = 38\% \quad (44)$$

Dieser Wert lässt sich auch mit Hilfe einer Simulation überprüfen.

```
Anzahl.Mantel = 5
Anzahl.Rep = 1000

Mantel = replicate(Anzahl.Rep, {
  sample(1:Anzahl.Mantel, Anzahl.Mantel, replace = FALSE)
})

Test = matrix(1:Anzahl.Mantel, nrow = Anzahl.Mantel, ncol = Anzahl.Rep)

Vergleich = (Mantel == Test) %>%
  t() %>%
  as.data.frame() %>%
  mutate(Anzahl = rowSums(.))

table(Vergleich$Anzahl)/sum(table(Vergleich$Anzahl))
```

ergibt

```
> table(Vergleich$Anzahl)/sum(table(Vergleich$Anzahl))

0      1      2      3      5
0.397 0.365 0.149 0.079 0.010
```

Die Abweichung ist also bereits nach 1000 Ziehungen klein.

Für $N \rightarrow \infty$ gilt übrigens, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_X(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \frac{1}{i!} = e^{-1} \frac{1}{k!} = \mathcal{P}_1(\{k\}) \quad (45)$$

■

Aufgabe 14

Sei $N_a := r$ die Anzahl aller rot eingefärbten Karten und n, N unverändert. Dann befinden sich $N - N_a$ nicht eingefärbte Karten im Stapel und die Problemstellung entspricht dem Ziehen von eingefärbten Kugeln aus einer Urne ohne Zurücklegen. Dafür wurde auf p.39f. eine passende Verteilung hergeleitet, nämlich die hypergeometrische mit

$$\mathcal{H}_{n;N_a;N-N_a}(\{T\}) = \frac{\binom{N_a}{T} \binom{N-N_a}{n-T}}{\binom{N}{n}} \quad (46)$$

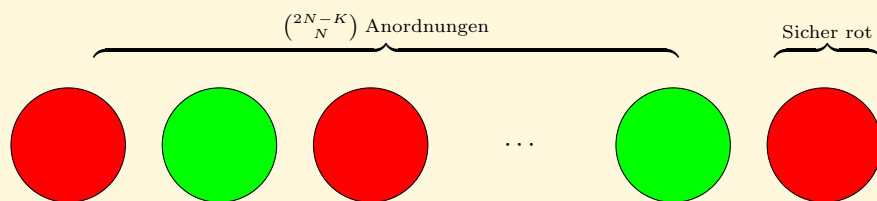
■

Aufgabe 15

Eine elementare Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, benötigt lediglich Kombinatorik. Grundlegend ist die Einsicht, dass gemäß der Aufgabenstellung nicht etwa $2N - k$ Griffe in die Tasche notwendig sind, um festzustellen, dass eine Streichholzschachtel leer ist und sich in der anderen k Streichhölzer befinden, sondern $2N - k + 1$. Obwohl es plausibel ist, dass man bereits beim Herausnehmen des letzten Streichholzes sieht, dass die Schachtel leer ist, wird in der Aufgabe angenommen, dass erst ein vergeblicher Griff in die Streichholzschachtel signalisiert, dass sie leer ist.

Da die Griffe in die Taschen gleich wahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlichkeit k Streichhölzer z.B. in der übriggebliebenen, linken Schachtel vorzufinden proportional zu $(\frac{1}{2})^{2N-k+1}$. Genauso ist die Wahrscheinlichkeit k Streichhölzer in der übriggebliebenen, rechten Schachtel vorzufinden ebenfalls proportional zu $(\frac{1}{2})^{2N-k+1}$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass *eine* der beiden Schachteln k übriggebliebene Streichhölzer enthält ist somit proportional zu $2 \cdot (\frac{1}{2})^{2N-k+1} = (\frac{1}{2})^{2N-k}$.

Als letztes muss nur noch abgezählt werden, wie viele mögliche "Pfade" es gibt, $2N-k+1$ mal aus beiden Schachteln so zu ziehen, dass man $N+1$ mal aus der später leeren Schachtel zieht und $N-k$ mal aus der anderen Schachtel in der noch $N-(N-k) = k$ Streichhölzer übrig bleiben. Sei die rechte Schachtel die leere und die linke die, in der noch k Streichhölzer verbleiben. Die Anzahl kann gut mit einem Urnenmodell hergeleitet werden. Angenommen, eine grüne Kugel symbolisiert den Griff in die linke Streichholzschachtel und eine rote Kugel einen Griff in die rechte Streichholzschachtel. Dann ist die gesuchte Anzahl gleich der Zahl aller Permutationen von $N-k$ grünen und N roten Kugeln, d.h. von $2N-k$ Kugeln insgesamt. Es sind nur N und nicht $N+1$ rote Kugeln, da die letzte Kugel (d.h. der letzte Griff der die leere Schachtel entdeckt) sicher rot ist. Diese Anzahl der Permutationen ist gegeben durch den Binomialkoeffizienten $\binom{2N-k}{N} = \binom{2N-k}{N-k}$.



Somit ist die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, k übriggebliebene Streichhölzer in einer der nicht-leeren Schachteln vorzufinden gleich

$$P(\{k\}) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k} \quad (47)$$

Dies deckt sich auch mit Simulationsergebnissen, die man in R laufen lassen kann. Für $N = 10$ lautet der Code demnach

```
N = 10

Verteilung = replicate(1000000, {

  Streichholz.1 = N
  Streichholz.2 = N

  while(Streichholz.1 != -1 & Streichholz.2 != -1){
    A = sample(1:2, 1, prob = c(0.5, 0.5))
    if(A == 1) Streichholz.1 = Streichholz.1 - 1
    else Streichholz.2 = Streichholz.2 - 1
  }
  return(max(Streichholz.1, Streichholz.2))
})

table(Verteilung)/sum(table(Verteilung))
```

und als Verteilung, z.B. der Zahlen $k = 1, \dots, 6$, ergibt sich

Verteilung	0	1	2	3	4	5	6
	0.175614	0.176334	0.167341	0.148392	0.121986	0.091216	0.061598

■

Aufgabe 16

Wir zeigen erst die von Georgii vorgeschlagene Identität, d.h. $\bar{\mathcal{B}}_{r,p}(\{0, 1, \dots, m\}) = \mathcal{B}_{r+m}(\{r, r+1, \dots, r+m\})$. Die Beweisstrategie ist, die negative Binomialverteilung in eine Darstellung mithilfe der Binomialverteilung zu bringen und dann erst eine Approximation der Poisson-Verteilung durch die Binomialverteilung und dann eine Approximation der Gamma-Verteilung durch Poisson-Verteilung zu beweisen.

Die Identität kann umgeformt werden zu

$$\sum_{j=0}^m \binom{r+j-1}{j} p^r (1-p)^j = \sum_{j=r}^{r+m} \binom{r+m}{j} p^j (1-p)^{r+m-j} \quad (48)$$

Diese Identität zu zeigen ist nicht trivial und die Idee der folgenden Herleitung stammt ursprünglich von *joriki* von math.SE (Frage Nr. 2904333). Es ist

$$\sum_{j=0}^m \binom{r+j-1}{j} p^r (1-p)^j = \sum_{j=0}^m \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j \quad (49)$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j &= \sum_{j=0}^m \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j 1^{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j (p + (1-p))^{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j \sum_{i=0}^{m-j} \binom{m-i}{i} p^i (1-p)^{m-j-i} \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{m-j} \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j \binom{m-j}{i} p^i (1-p)^{m-j-i} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j \binom{m-j}{i} p^i (1-p)^{m-j-i} \\ &= \sum_{i=0}^m p^r p^i (1-p)^{m-i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{r+j-1}{r-1} \binom{m-j}{i} \\ &= \sum_{i=0}^m p^r p^i (1-p)^{m-i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-j}{m-j-i} \binom{r+j-1}{j} \\ &= \sum_{i=0}^m p^r p^i (1-p)^{m-i} \binom{r+m}{m-i} \\ &= \sum_{i=0}^m p^r p^i (1-p)^{m-i} \binom{r+m}{r+i} \\ &= \sum_{i=r}^{r+m} \binom{r+m}{i} p^i (1-p)^{r+m-i} \end{aligned}$$

Aufgabe 17

Georgii gibt in diesem Fall in seiner “Lösung” gar keine Anhaltspunkte für die formale Herleitung der Identität.

Für $n \rightarrow \infty$ wurde bereits auf Seite 42 gezeigt, dass $\binom{n}{r} \rightarrow \frac{n^r}{r!}$ gilt. Also gilt

$$\binom{n}{r} \sim \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sim \frac{n^r}{(r-1)!} = \frac{n^r}{\Gamma(r)} \quad (50)$$

In einem ersten Schritt hat man, dass

$$P(s_n T_{r:n} \leq t) = P(T_{r:n} \leq \frac{t}{s_n}) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^{\frac{t}{s_n}} s^{r-1} (1-s)^{n-r} ds \quad (51)$$

Wähle nun die Substitution $s = \frac{x}{s_n}$. Dann gilt $ds = \frac{1}{s_n} dx$ und der Ausdruck von oben vereinfacht sich zu

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^{\frac{t}{s_n}} s^{r-1} (1-s)^{n-r} ds = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^t \left(\frac{1}{s_n}\right)^{r-1} x^{r-1} \left(1 - \frac{nx}{ns_n}\right)^{n-r} dx \frac{1}{s_n} \quad (52)$$

Wegen $\frac{n}{s_n} \rightarrow \alpha$ und der Abschätzung oben ist dies aber im Limes gleich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^t \left(\frac{1}{s_n}\right)^{r-1} x^{r-1} \left(1 - \frac{nx}{ns_n}\right)^{n-r} dx \frac{1}{s_n} = \int_0^t \alpha^r \frac{1}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x} dx \quad (53)$$

und dieser Ausdruck ist identisch zu $\Gamma_{\alpha,r}((0, t))$. ■

Aufgabe 18

Sei $Z = aX + b$. Dann gilt für beliebiges $y \in (-\infty, \infty)$

$$F_Z(y) = P(Z \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx \quad (54)$$

und deshalb

$$f_Z(y) = \frac{d}{dy} F_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2v}} \frac{d}{dy} \frac{y-b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2v}} \frac{1}{a} \quad (55)$$

Im letzten Schritt wurde die Leibniz-Regel für das Differenzieren unter dem Integralzeichen verwendet. Weiteres Vereinfachen führt schließlich auf

$$f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2v}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi v a}} e^{-\frac{(y-(ma+b))^2}{2a^2 v}} \quad (56)$$

und somit

$$F_Z(y) = \int_{-\infty}^y f_Z(y) dy = \mathcal{N}_{am+b, a^2 v} \quad (57)$$
■