
LÖSUNGEN ZU
HANS-OTTO GEORGII: STOCHASTIK

— KAPITEL 3 —

TIM KOPISCHKE
11/2020

Aufgabe 1 : ✓	Aufgabe 9 : ✗	Aufgabe 17 : ✓	Aufgabe 26 : ✗
Aufgabe 2 : ✓	Aufgabe 10 : ✓	Aufgabe 18 : ✗	Aufgabe 27 : ✗
Aufgabe 3 : ✓	Aufgabe 11 : ✓	Aufgabe 19 : ✓	Aufgabe 28 : ✗
Aufgabe 4 : ✓	Aufgabe 12 : ✗	Aufgabe 20 : ✗	Aufgabe 29 : ✗
Aufgabe 5 : ✗	Aufgabe 13 : ✗	Aufgabe 21 : ✗	Aufgabe 30 : ✗
Aufgabe 6 : ✓	Aufgabe 14 : ✗	Aufgabe 22 : ✗	Aufgabe 31 : ✗
Aufgabe 7 : ✗	Aufgabe 15 : ✓	Aufgabe 23 : ✗	Aufgabe 32 : ✗
Aufgabe 8 : ✗	Aufgabe 16 : ✗	Aufgabe 24 : ✗	Aufgabe 33 : ✗
		Aufgabe 25 : ✗	

Aufgabe 1

Sei $E :=$ „Einbruch geschieht“ und $A :=$ „Alarmanlage reagiert“. Dann ist nach Aufgabenstellung

$$P(A | E) = 0.99$$

$$P(A | \neg E) = 0.002$$

$$P(E) = 0.0005$$

Gemäß der Bayesschen Formel gilt deshalb

$$P(E | A) = \frac{P(E) \cdot P(A | E)}{P(E) \cdot P(A | E) + P(\neg E) \cdot P(A | \neg E)} = \frac{0.0005 \cdot 0.99}{0.0005 \cdot 0.99 + 0.9995 \cdot 0.002} = \frac{0.000495}{0.002494} = 19.8\%$$

Die Wahrscheinlichkeit ist verhältnismäßig gering. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch extrem gering ist. Insbesondere ist sie viel kleiner als die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms. ■

Aufgabe 2

Dieses Problem ist das berühmte *Three Prisoners Problem* und hat sogar eine eigene Wikipedia-Seite, die eine ausführlich ausgearbeitete Lösung besitzt.

Der Schlüssel der Lösung ist die Voraussetzung, dass der Wärter $A :=$ Anton nicht sagen darf, dass er der Begnadigte ist bzw. sterben muss. Somit darf er in dem Fall der Begnadigung von $C :=$ Clemens nur $B :=$ Bastian nennen, während er bei Begnadigung von A sowohl B als auch C nennen dürfte. Die Lösung ist dann eine einfache Anwendung des Bayesschen Theorems. Sei A, B, C das Ereignis, dass A, B bzw. C genannt werden und a, b, c das Ereignis, dass A, B bzw. C begnadigt werden.

$$P(a | B) = \frac{P(a)P(B | a)}{P(B)}$$

$$P(c | B) = \frac{P(c)P(B | c)}{P(B)}$$

Wegen $P(a) = P(c) = 1/3$ aber $P(B|a) < P(B|c)$ haben Anton und Clemens **nicht** beide eine Überlebenswahrscheinlichkeit von 50%. ■

Aufgabe 3

Sei F das Ereignis, dass der Koffer fehlgeleitet wurde und MUC, LON, NY das Ereignis, dass er in München, London bzw. New York fehlgeleitet wurde. Dann liegt in jeder Stadt ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p vor. Es gilt, dass $P(F|MUC) = P(F|LON) = P(F|NY) = 1$. Wenn der Koffer in einer der Städte fehlgeleitet wurde, ist er sicher fehlgeleitet. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Koffer *genau* in München fehlgeleitet wurde, ist $P(MUC) = p$; dass er genau in London fehlgeleitet wurde $P(LON) = p \cdot (1 - p)$ und dass er genau in New York fehlgeleitet wurde $P(NY) = p \cdot (1 - p)^2$. Andererseits ist

$$P(F) = p + p(1 - p) + p(1 - p)^2 = 3p - 3p^2 + p^3 = 1 - (1 - p)^3 = 1 - P(\neg F) \quad (1)$$

Also erhält man

$$\begin{aligned} P(MUC|F) &= \frac{P(MUC)P(F|MUC)}{P(F)} = \frac{p}{1 - (1 - p)^3} \\ P(LON|F) &= \frac{P(LON)P(F|LON)}{P(F)} = \frac{p(1 - p)}{1 - (1 - p)^3} \\ P(NY|F) &= \frac{P(NY)P(F|NY)}{P(F)} = \frac{p(1 - p)^2}{1 - (1 - p)^3} \end{aligned}$$

■

Aufgabe 4

Die von Georgii angegebene Lösung ist äußerst kurz und zeigt keinerlei Rechnungen. Aufgrund der Symmetrie der Betafunktion, d.h. $B(a, b) = B(b, a)$, gilt der angegebene Rekursionszusammenhang auch für b ,

$$B(a, b + 1) = \frac{b}{a + b} B(a, b) \quad (2)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
P(S_n = l) &= \frac{\binom{-a}{l} \binom{-b}{n-l}}{\binom{-a-b}{n}} \\
&= \frac{\frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-l+1)}{l!} \frac{(-b)(-b-1)\cdots(-b-n-l+1)}{(n-l)!}}{\frac{(-a-b)(-a-b-1)\cdots(-a-b-n+1)}{n!}} \\
&= \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-l+1)(-b)(-b-1)\cdots(-b-n-l+1)}{(-a-b)(-a-b-1)\cdots(-a-b-n+1)} \\
&= \binom{n}{l} \frac{(-1)^{l+(n-l)} a(a+1)\cdots(a+l-1)b(b+1)\cdots(b+n-l-1)}{(-1)^n (a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n-1)} \\
&= \binom{n}{l} \frac{a}{(a+b)} \frac{a+1}{(a+b+1)} \cdots \frac{a+l-1}{a+b+l-1} \frac{b}{a+b+l} \frac{b+1}{a+b+l+1} \cdots \frac{b+n-l-1}{a+b+n-l-1} \\
&= \binom{n}{l} \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \frac{B(a+2, b)}{B(a+1, b)} \cdots \frac{B(a+l, b)}{B(a+l-1, b)} \cdot \frac{B(a+l, b+1)}{B(a+l, b)} \cdots \frac{B(a+l, b+n-l)}{B(a+l, b+n-l-1)} \\
&= \binom{n}{l} \frac{B(a+l, b+n-l)}{B(a, b)} \\
&= \binom{n}{l} B(a, b)^{-1} \int_0^1 x^{a+l-1} (1-x)^{b+n-l-1} dx \\
&= \binom{n}{l} B(a, b)^{-1} \int_0^1 x^{a-1} x^l (1-x)^{b-1} x^{n-l} dx \\
&= \int_0^1 B(a, b)^{-1} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \binom{n}{l} x^l x^{n-l} dx \\
&= \int_0^1 \beta_{a,b}(x) \mathcal{B}_{n,x}(\{l\}) dx
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 6

(a).

$$\begin{aligned}
P(A) \cdot P(B^c) &= P(A) \cdot P(\Omega \setminus B) \\
&= P(A) \cdot (1 - P(B)) \\
&= P(A) \cdot (1 - P(B|A)) \\
&= P(A) \cdot \left(1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\right) \\
&= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(A \setminus (A \cap B)) \\
&= P((A \setminus A) \cup (A \setminus B)) \\
&= P(A \setminus B) \\
&= P(A \cap B^c)
\end{aligned}$$

□

(b).

$$\begin{aligned}
P((A \cup B) \cap C) &= P((A \setminus B \cup B \setminus A \cup A \cap B) \cap C) \\
&= P(((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C) \cup (A \cap B \cap C)) \\
&= P((A \setminus B) \cap C) + P(B \setminus A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A)P(B^c)P(C) + P(B)P(A^c)P(C) + P(A)P(B)P(C) \\
&= P(C) \cdot (P(A)P(B^c) + P(B)P(A^c) + P(A)P(B)) \\
&= P(C) \cdot (P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)) \\
&= P(C) \cdot P(A \cup B)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10

Gemäß der Aufgabenstellung und den De Morganschen Regeln gilt

$$T < t = \neg((T_A \geq t \wedge T_B \geq t) \vee (T_C \geq t \wedge T_D \geq t)) = \neg(T_A \geq t \wedge T_B \geq t) \wedge \neg(T_C \geq t \wedge T_D \geq t) \quad (3)$$

Übertragen in Mengennotation erhält man

$$P(T < t) = P((T_A \geq t \cap T_B \geq t)^c \cap (T_C \geq t \cap T_D \geq t)^c) \quad (4)$$

Gemäß Angabe sind A, B, C und D identisch exponentialverteilt und unabhängig. Somit gilt weiter

$$P((T_A \geq t \cap T_B \geq t)^c \cap (T_C \geq t \cap T_D \geq t)^c) = P((T_A \geq t \cap T_B \geq t)^c) \cdot P((T_C \geq t \cap T_D \geq t)^c) \quad (5)$$

und

$$P((T_A \geq t \cap T_B \geq t)^c) = P((T_C \geq t \cap T_D \geq t)^c) \quad (6)$$

Andererseits ist die Verteilungsfunktion einer zum Parameter α exponentialverteilten Zufallsvariable T gegeben durch

$$F_T(x) = \int_0^x f_\alpha(t) dt = \int_0^x \alpha \exp(-\alpha t) dt = 1 - \exp(-\alpha x) \quad (7)$$

und man bekommt durch Übergang auf das Gegenereignis

$$\begin{aligned}
P((T_A \geq t \cap T_B \geq t)^c) &= 1 - P(T_A \geq t \cap T_B \geq t) \\
&= 1 - P(T_A \geq t)P(T_B \geq t) \\
&= 1 - P((T_A \leq t)^c)P((T_B \leq t)^c) \\
&= 1 - (1 - P(T_A \leq t))(1 - P(T_B \leq t)) \\
&= 1 - (1 - (1 - \exp(-\alpha t)))(1 - (1 - \exp(-\alpha t))) \\
&= 1 - (\exp(-\alpha t))(\exp(-\alpha t)) \\
&= 1 - \exp(-2\alpha t)
\end{aligned}$$

Aufgrund von (4) und (6) hat man dann insgesamt

$$P(T < t) = (1 - \exp(-2\alpha t))^2 \quad (8)$$

was zu zeigen war.

□

Aufgabe 11

Intuitiv ist unmittelbar klar, dass X und Y nicht unabhängig sein können, da $X > Y$ nach beiden Würfeln. Wenn beispielsweise bereits bekannt ist, dass $Y(\omega_1, \omega_2) = \max(\omega_1, \omega_2) = 4$ ist, dann muss notwendigerweise schon $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 > 4$ gelten und somit

$$P(X(\omega_1, \omega_2) = x \mid Y(\omega_1, \omega_2) = 4) \neq P(x) \quad (9)$$

Dies kann auch noch genauer gezeigt werden. Die gemeinsame Verteilung $P \circ (X, Y)^{-1}$ bestimmt man einfach über das Zählen der entsprechenden Elementarereignisse.

$$P(X = 2, Y = i) = \begin{cases} \frac{1}{16} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

$$P(X = 3, Y = i) = \begin{cases} \frac{2}{16} & i = 2 \\ 0 & i \in \{1, 3, 4\} \end{cases}$$

$$P(X = 4, Y = i) = \begin{cases} \frac{1}{16} & i = 2 \\ \frac{2}{16} & i = 3 \\ 0 & i \in \{1, 4\} \end{cases}$$

$$P(X = 5, Y = i) = \begin{cases} \frac{2}{16} & i = 3 \\ \frac{2}{16} & i = 4 \\ 0 & i \leq 2 \end{cases}$$

$$P(X = 6, Y = i) = \begin{cases} \frac{1}{16} & i = 3 \\ \frac{2}{16} & i = 4 \\ 0 & i \leq 2 \end{cases}$$

$$P(X = 7, Y = i) = \begin{cases} \frac{2}{16} & i = 4 \\ 0 & i \leq 3 \end{cases}$$

$$P(X = 8, Y = i) = \begin{cases} \frac{1}{16} & i = 4 \\ 0 & i \leq 3 \end{cases}$$

Daneben ist

$$P(X = 2) = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 3) = \frac{2}{16}$$

$$P(X = 4) = \frac{3}{16}$$

$$P(X = 5) = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 6) = \frac{3}{16}$$

$$P(X = 7) = \frac{2}{16}$$

$$P(X = 8) = \frac{1}{16}$$

$$P(Y = 1) = \frac{1}{16}$$

$$P(Y = 2) = \frac{3}{16}$$

$$P(Y = 3) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y = 4) = \frac{7}{16}$$

Gemäß Korollar (3.21) reicht bereits ein Gegenbeispiel : Wähle also $X = 5$ und $Y = 2$, dann ist

$$P(X = 5, Y = 2) = 0 \neq \frac{4}{16} \frac{3}{16} = P(X = 5)P(Y = 2) \quad (10)$$

□

Aufgabe 15

(a). Es ist allgemein bekannt, dass $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Mit dieser Identität und der Definition der Beta-Verteilung erhält man dann

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha,r} \star \gamma_{\alpha,s} &= \int_0^x \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} y^{r-1} e^{-\alpha y} \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} (x-y)^{s-1} e^{-\alpha(x-y)} dy \\
&= \int_0^x \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} y^{r-1} (x-y)^{s-1} e^{-\alpha x} dy \\
&= \int_0^x \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r+s)B(r,s)} y^{r-1} (x-y)^{s-1} e^{-\alpha x} dy \\
&= \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r+s)} e^{-\alpha x} \int_0^x B(r,s)^{-1} y^{r-1} (x-y)^{s-1} dy
\end{aligned}$$

Verwende nun die Substitution $y := xt$. Dann ist $dy = xdt$ und die Grenzen verändern sich zu $t_y(x) = 1$ bzw. $t_y(0) = 0$. Insgesamt erhält man damit

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha,r} \star \gamma_{\alpha,s} &= \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r+s)} e^{-\alpha x} \int_0^1 B(r,s)^{-1} (xt)^{r-1} (x-xt)^{s-1} x dt \\
&= \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r+s)} e^{-\alpha x} x^{r+s-1} \underbrace{\int_0^1 B(r,s)^{-1} t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt}_{=1} \\
&= \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r+s)} e^{-\alpha x} x^{r+s-1} \\
&= \gamma_{\alpha,r+s}
\end{aligned}$$

■

(b). Nach Definition von negativer Binomialverteilung und Faltung ist

$$\mathcal{B}_{r,p}^{neg} \star \mathcal{B}_{s,p}^{neg}(\{k\}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \binom{-r}{l} p^r (p-1)^l \binom{-s}{k-l} p^s (p-1)^{k-l} \quad (11)$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \binom{-r}{l} \binom{-s}{k-l} p^{r+s} (p-1)^k \quad (12)$$

$$= p^{r+s} (p-1)^k \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \binom{-r}{l} \binom{-s}{k-l} \quad (13)$$

$$= p^{r+s} (p-1)^k \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \binom{-r-s}{k} P(S_n = l) \quad (14)$$

$$= p^{r+s} (p-1)^k \binom{-r-s}{k} \quad (15)$$

$$= \mathcal{B}_{r+s,p}^{neg}(\{k\}) \quad (16)$$

■

Aufgabe 17

Eine intuitive Art sich diesem Problem zu nähern ist, sich jedes Ei als Ast eines Baumes vorzustellen, dessen Ende mit Wahrscheinlichkeit p blüht und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ nicht. Für eine gegebene Anzahl K an Ästen ist die Anzahl L der blühenden Enden somit binomialverteilt mit p und k , d.h.

$$P(L = l \mid K = k) = \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} \quad (17)$$

Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass genau l Enden blühen, ist somit die Summe der Wahrscheinlichkeiten, $k_1, k_2, \dots$ Äste zu erhalten und jeweils genau l blühende Enden vorzufinden,

$$\begin{aligned} P(L = l) &= \sum_{n=l}^{\infty} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} p^l \sum_{n=l}^{\infty} \binom{n}{l} (1-p)^{n-l} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} p^l \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{l!(n-l)!} (1-p)^{n-l} \lambda^n \\ &= e^{-\lambda} p^l \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!l!} (1-p)^r \lambda^{r+l} \\ &= \frac{1}{l!} e^{-\lambda} p^l \lambda^l \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} (1-p)^r \\ &= \frac{(p\lambda)^l}{l!} e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda p}{r!} (1-p)^r \\ &= \frac{(p\lambda)^l}{l!} e^{-\lambda} e^{\lambda - \lambda p} \\ &= \frac{(p\lambda)^l}{l!} e^{-p\lambda} \\ &= \mathcal{P}_{p\lambda}(\{l\}) \end{aligned}$$

■

Aufgabe 19

Der Kern der Lösung besteht aus drei zentralen Beobachtungen :

1. Es ist $\{Z_s = Z_t\} = \{N_t - N_s \equiv 0 \pmod{2}\}$, denn für $N_t = 2k + 1, N_s = 2s + 1$ mit $k, s \in \mathbb{N}$ ist $N_t - N_s = 2(k - s) \equiv 0 \pmod{2}$ und für gerade N_t, N_s klarerweise auch.
2. Die Differenzen $N_t - N_s$ sind wieder Poisson-verteilt mit Parameter $\alpha(t - s)$.
3. Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Der Rest ergibt sich quasi sofort :

$$\begin{aligned} P(Z_s = Z_t) &= P(N_t - N_s \equiv 0 \pmod{2}) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{N_t - N_s = 2k\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t - N_s = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t-s))^{2k}}{(2k)!} e^{-\alpha(t-s)} \\ &= e^{-\alpha(t-s)} \frac{1}{2} (e^{\alpha(t-s)} + e^{-\alpha(t-s)}) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-\alpha(t-s)}) \end{aligned}$$

■